



Simulation et essais dynamiques sur stators de moteurs de traction

Sid-Hamed Benabdallah Chentouf

► To cite this version:

Sid-Hamed Benabdallah Chentouf. Simulation et essais dynamiques sur stators de moteurs de traction. Autre. Université de Franche-Comté, 2011. Français. NNT : 2011BESA2002 . tel-00776475

HAL Id: tel-00776475

<https://theses.hal.science/tel-00776475>

Submitted on 15 Jan 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

L'U.F.R. DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

**GRADE DE DOCTEUR DE
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ**
Spécialité : Mécanique

**SIMULATIONS ET ESSAIS
DYNAMIQUES SUR STATORS
DE MOTEURS DE TRACTION**

par

Sid-Ahmed CHENTOUF

Soutenue le 11 mars 2011 devant le jury:

Président / Rapporteur

E. AUBRY

Professeur, ENSISA, Université de Haute
Alsace

Rapporteur

A. LOREDO

Professeur, ISAT, Université de Bourgogne

Examineurs

S.COGAN

Chargé de Recherche CNRS, HDR, Institut
Femto-ST

C.LAITEM

Ingénieur R&D, ALSTOM Transport

J-L.RAYNAUD

Ingénieur de Recherche CNRS, Institut
Femto-ST

Directeur de thèse

N. BOUHADDI

Professeur, Université de Franche-Comté

Remerciements

Par ces modestes mots, j'adresse mes remerciements à tous ceux qui ont participé de près ou de loin au bon déroulement de ma thèse de doctorat au sein du Département de Mécanique Appliquée de Besançon.

Mes sincères remerciements reviennent en premier lieu à mon directeur de thèse, Monsieur le Professeur Noureddine Bouhaddi et à mon tuteur industriel, Monsieur Claude Laitem. Merci à eux pour leur encadrement scientifique et leur *coaching* personnel, pour leur dynamisme et leur présence.

Je tiens également à remercier Monsieur le Docteur Scott Cogan pour m'avoir fait l'honneur d'assurer la présidence de mon jury d'examen. J'exprime ma profonde gratitude pour Madame la Professeur Evelyne Aubry et Monsieur le Professeur Alexandre Loredo pour s'être intéressés à mes travaux et m'avoir honoré en acceptant la tâche longue et difficile de rapporteur de mon mémoire de thèse.

Mes remerciements vont également à Messieurs les Docteurs Sheng-Jun Huang et Jean-Louis Raynaud qui m'ont tant appris sur les mondes du recalage de modèle et des essais dynamiques. Merci à eux pour leur patience durant ces trois années.

Je ne peux oublier mes collègues doctorants du Département de Mécanique Appliquée sans qui cette expérience personnelle n'aurait pu aussi bien se passer. Merci Docteurs Petr David et Hung Tran pour avoir joué votre rôle de « Sages du bureau 44H ». Merci aux futurs Docteurs : Youssef Gerges, Agathe Vercoutter, Djoudi Hamza, Alexandre Gilbin et Guillaume Ham pour votre bonne humeur et votre amitié.

Je m'excuse de ne pas pouvoir citer tout le petit monde du département : doctorants, techniciens, employés...Je leur adresse à tous un grand MERCI.

Je terminerai ces quelques mots par citer Bernard de Chartres (XII^e) qui a dit un jour:

« Nous sommes comme des nains juchés sur des épaules de géants (les Anciens), de telle sorte que nous puissions voir plus de choses et de plus éloignées que n'en voyaient ces derniers. Et cela, non point parce que notre vue serait puissante ou notre taille avantageuse, mais parce que nous sommes portés et exhausés par la haute stature des géants. ».

Je tiens donc ici à rendre hommage à tous ceux qui ont tant apporté au monde de la recherche scientifique et qui nous ont ainsi portés sur leurs épaules.

*A mes parents, Fatima Zahra et El Hachemi.
A Amina, Asma et Karim.*

Table des matières

REMERCIEMENTS.....	I
LISTE DES FIGURES.....	V
LISTE DES TABLEAUX	VIII
LISTE DES PRINCIPALES NOTATIONS ET ABREVIATIONS	IX
I. INTRODUCTION GENERALE.....	1
II. METHODES DIRECTES ET INVERSES	9
II.1. METHODES GENERALES EN ELASTODYNAMIQUE.....	10
II.1.1. Relations de bases en dynamique des structures	10
II.1.2. Identification paramétrique en élastodynamique linéaire.....	15
II.2. RAPPELS SUR LA THEORIE DE L’HOMOGENEISATION DES MATERIAUX.....	34
II.2.1. Propriétés générales.....	34
II.2.2. Relations d’élasticité linéaire	34
II.2.3. Matériau orthotrope.....	35
II.2.4. Matériau unidirectionnel	36
II.2.5. Caractérisation élastique des composites : cas des stratifiés périodiques orthotropes	37
III. ETUDE D’UN STATOR DE MOTEUR FERROVIAIRE	45
III.1. PRESENTATION DE LA STRUCTURE PHYSIQUE.....	46
III.2. ETAT DE L’ART SUR L’ETUDE ET LA MODELISATION DES STATORS DE MOTEURS DE TRACTION FERROVIAIRE.....	49
III.3. ETUDE D’UNE ARCHITECTURE DE TYPE 1.....	53
III.3.1. Campagne d’essais	54
III.3.2. Construction du modèle éléments finis	69
III.3.3. Identification des paramètres matériaux du modèle.....	84
III.4. EXTENSION DES REGLES DE MODELISATION RETENUES A UNE ARCHITECTURE DE TYPE 2	102
III.4.1. Description de l’architecture de la structure.....	102
III.4.2. Campagne d’essais	103
III.4.3. Modélisation : retranscription des principes établis	107
III.4.4. Confrontation avec les résultats expérimentaux.....	110
III.5. BILAN ET ETABLISSEMENT DE REGLES DE MODELISATION	110
III.5.1. Limites de prédiction.....	110
III.5.2. Synthèse et conclusions.....	115
IV. ANALYSE DE ROBUSTESSE DES MODELES DE MOTEURS FERROVIAIRES ..	119
IV.1. ETAT DE L’ART SUR LA MODELISATION ET LA PROPAGATION DES INCERTITUDES	119
IV.1.1. Méthodes stochastiques en dynamique	121
IV.1.1.1. Choix des paramètres stochastiques.....	121
IV.1.1.1.1. Types de paramètres	121
IV.1.1.1.2. Choix et construction des lois de probabilité.....	122
IV.1.1.1.3. Choix des paramètres pertinents.....	122
IV.1.1.2. Méthode de Monte Carlo	123
IV.1.1.2.1. Atouts et inconvénients	123
IV.1.1.2.2. Variantes améliorées.....	123

IV.1.1.3.	Eléments finis stochastiques	124
IV.1.1.3.1.	Méthode des Eléments Finis Stochastiques par Perturbations.....	124
IV.1.1.3.2.	Méthode Spectrale des Eléments Finis Stochastiques	124
IV.1.1.3.3.	Méthodes Fiabilistes	125
IV.1.1.3.4.	Méthode Non-Paramétrique	125
IV.1.1.4.	Bilan sur les méthodes stochastiques et démarche retenue.....	128
IV.1.2.	Généralités sur les méthodes non-stochastiques.....	130
IV.2.	REDUCTION DE MODELE POUR L'ANALYSE DE ROBUSTESSE	131
IV.2.1.	Réanalyse approchée	131
IV.2.2.	Réduction de modèles par sous-structuration.....	133
IV.2.2.1.	Types de modes utilisés pour la construction des bases de réduction.....	134
IV.2.2.2.	Principe général de la sous-structuration	137
IV.2.2.3.	Méthodes de sous-structuration basées sur l'approche de Ritz.....	138
IV.2.3.	Amélioration des bases de réduction de Ritz	143
IV.2.3.1.	Méthode d'enrichissement d'une base de condensation par des vecteurs de résidus statiques (SRVE).....	146
IV.2.3.1.1.	Principe de la méthode en condensation directe sur une structure	146
IV.2.3.1.2.	Extension de la méthode à la sous-structuration de Craig-Bampton	148
IV.2.3.2.	Méthode des Approximations Combinées et son extension à la sous-structuration (GCA)	149
IV.2.3.2.1.	Principe de la méthode des approximations combinées en condensation directe	149
IV.2.3.2.2.	Extension de la méthode à la réanalyse approchée en sous-structuration	152
IV.3.	PROPAGATION DES INCERTITUDES AVEC UN MODELE REDUIT	154
IV.3.1.	Description du modèle d'étude.....	155
IV.3.2.	Convergence d'une simulation de type Monte Carlo	156
IV.3.3.	Stratégie de propagation retenue	157
IV.3.4.	Lien entre les niveaux de dispersion des approches paramétrique et non-paramétrique	164
IV.4.	SIMULATION NUMERIQUE	166
IV.4.1.	Cas d'un exemple académique	167
IV.4.1.1.	Modèle de propagation des incertitudes.....	167
IV.4.1.2.	Propagation des incertitudes en sous-structuration et amélioration de la robustesse	168
IV.4.1.3.	Critère de troncature a posteriori de la méthode GCA.....	169
IV.4.1.4.	Bilan des performances des méthodes de réduction	171
IV.4.2.	Application industrielle : stator d'architecture 1	175
IV.4.2.1.	Description du modèle	175
IV.4.2.1.1.	Propagation des incertitudes par approche hybride et bilan des performances de la réduction.....	177
IV.4.2.2.	Effets des incertitudes sur le MEF du stator ferroviaire	179
CONCLUSION GENERALE.....		183
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES		187

Liste des figures

Fig I. 1: Représentation d'une structure d'un empilement feuilleté par différentes modélisations : a- modélisation réaliste en plusieurs couches, b- couronne avec répartition internes de masses, c- modélisation en 2D, d- modélisation homogène orthotrope en 3D,	3
Fig II. 1: Evolution du rang et du conditionnement de Y^m en fonction du nombre de capteurs c	24
Fig II. 2: Fonction coût et problème des optima locaux	28
Fig II. 3 : Schéma global d'un processus de recalage	33
Fig II. 4: Matériau composite unidirectionnel	36
Fig II. 5 : Représentation d'un matériau stratifié : notations	38
Fig III. 1: Assemblage feuilleté à partir d'une tôle unitaire (maquette de 30 feuilles).....	46
Fig III. 2: intégration de l'empilement de tôles et maintien par la carcasse extérieure	47
Fig III. 3: a- forme globale d'une bobine avant insertion –b - Section droite d'une bobine insérée.....	48
Fig III. 4: Têtes de bobines et cercles de phase	48
Fig III. 5: classification en modes symétriques et antisymétriques	51
Fig III. 6: illustration de la classification en modes à déformées radiales pures ou non	51
Fig III. 7: Illustration de d'une géométrie de carcasse montée frettée, enveloppant le cœur feuilleté..	52
Fig III. 8: Définition du repère local	55
Fig III. 10: Moyens d'essais (stator nu architecture 1).....	56
Fig III. 11: Suspension en trois points	57
Fig III. 12: Ensemble du montage (vue avant)	57
Fig III. 13: Ensemble du montage (vue arrière)	57
Fig III. 14: 1 ^{er} point d'excitation (pe1)	58
Fig III. 15: 2 ^{ème} point d'excitation (pe2).....	58
Fig III. 16: Emplacement des capteurs sur le modèle sur la structure	Fig III. 17: Emplacement des capteurs 58
Fig III. 18: FRF pour la validation des conditions d'essais.....	60
Fig III. 19: Mesure des modules de Young axial (a) et radial (b) d'un empilement de feuilles imprégné de résine.....	63
Fig III. 20: Protocole expérimental de caractérisation du module de Young axial d'un empilement feuilleté par méthode ultrasons	64
Fig III. 21: Schéma d'acquisition du temps de passage de l'onde ultrasonore dans une structure.....	64
Fig III. 22: Essais sur le stator bobiné	65
Fig III. 23: FRF du stator nu (sur 4 ddls capteurs)	66
Fig III. 24: FRF du stator bobiné (sur 4 ddls capteurs)	66
Fig III. 25: Impact du bobinage sur les MAC mesurés : stator bobiné / stator nu.....	68
Fig III. 26: Types de déformées modales du stator bobiné (représentation sans têtes de bobines).....	68
Fig III. 32: Cylindres avec et sans raidisseurs internes	75
Fig III. 35: Liaisons du bobinage avec le reste du stator	77
Fig III. 42: Plage de variations absolues des fréquences propres	87
Fig III. 43: Plage de variations des écarts fréquentiels relatifs.....	87
Fig III. 44: MAC des dix premiers modes.....	87
Fig III. 45: Coefficients de corrélation : paramètres - écarts fréquentiels relatifs	88
Fig III. 46: Coefficients de corrélation : paramètres - MAC	88
Fig III. 47: Energies de déformation élément par élément	90
Fig III. 50: Matrices MAC avant et après recalage (cas d'homogénéisation 4)	95
Fig III. 51: Matrices MAC avant et après recalage (cas d'homogénéisation 3)	98

Fig III. 52: Présentation d'un stator d'architecture de type 2.....	103
Fig III. 53: Description de la suspension métallique utilisée (essais architecture 2).....	104
Fig III. 54: Emplacements des capteurs sur le modèle (points rouges).....	105
Fig III. 55: FRF co-localisée sur le point d'excitation de la structure d'architecture 2.....	106
Fig III. 56: Empilement feuilleté architecture 2.....	109
Fig III. 57: Carcasse architecture 2.....	109
Fig III. 58: Modèle éléments finis architecture 2.....	109
Fig III. 59: Bobinage architecture 2.....	109
Fig III. 60: Energies de déformations élémentaires – Stator d'architecture 2.....	111
Fig III. 63: Mesure sur les têtes de bobines : 12 points de mesure (points rouge) et position de l'excitateur.....	113
Fig III. 64: Montage expérimental : architecture 2, essais sur têtes de bobines et cercles de phases isolés.....	114
Fig III. 65: Déformées modales des têtes de bobines et cercles de phases : irrégularités et non-linéarités de grands déplacements.....	114
Fig IV. 1: Schéma de déroulement d'une phase de conception.....	132
Fig IV. 2: illustration des ddl internes et de jonction.....	134
Fig IV. 3: Illustration d'un mode d'attache d'une sous-structure : effort imposé.....	135
Fig IV. 4: Illustration d'un mode normal à interface bloquée.....	136
Fig IV. 5: Déroulement d'une procédure de sous-structuration.....	138
Fig IV. 6: Réanalyse approchée en sous-structuration: compromis entre un calcul par base actualisée et un autre par base nominale unique.....	145
Fig IV. 7: Description du modèle académique.....	155
Fig IV. 8: Premier mode d'une poutre encastrée-encastrée.....	156
Fig IV. 9: Illustration du critère de convergence d'une simulation de type Monte Carlo : cas d'une poutre encastrée-encastrée.....	157
Fig IV. 10: Effet du choix du nombre de modes normaux sur la base de réduction de Craig-Bampton.....	159
Fig IV. 11: Critère de convergence de la simulation Monte Carlo - $\delta_k = 0.05$	160
Fig IV. 12: Intervalles de confiance et dispersion des MAC et des écarts fréquentiels pour $\delta_k = 0.05$	161
Fig IV. 13: Critère de convergence de la simulation Monte Carlo - $\delta_k = 0.075$	161
Fig IV. 14: Intervalles de confiance et dispersion des MAC et des écarts fréquentiels.....	163
Fig IV. 15: Evolution de la robustesse de la base de CB nominale en fonction du nombre de modes.....	164
Fig IV. 16: Identification du niveau de dispersion non-paramétrique.....	165
Fig IV. 17: Paramètres incertains choisis pour le cas académique du portique.....	167
Fig IV. 18: Critère de convergence en énergie résiduelle.....	171
Fig IV. 19: Qualité de prédiction des méthodes de réduction : critère fréquentiel- Modèle académique (approche paramétrique) (a) : moyennes – (b) : valeurs inférieures (c) : valeurs supérieures (confiance à 96%).....	172
Fig IV. 20: Qualité de prédiction des méthodes de réduction : critère vectoriel- Modèle académique – (approche paramétrique) (a) : valeurs inférieures– (b) : valeurs supérieures (confiance à 96%).....	172
Fig IV. 21: Qualité de prédiction des méthodes de réduction : critère fréquentiel.....	173
Fig IV. 22: Qualité de prédiction des méthodes de réduction : critère vectoriel.....	173
Fig IV. 23: Gain en temps de calcul CPU des méthodes de réduction.....	174
Fig IV. 24: Stator d'architecture 1 : MEF établi et réalité géométrique.....	175
Fig IV. 25: Découpage du MEF du stator en 4 sous-structures selon les 2 plans « 4 » : 1- Empilement de tôles ; 2-a : Partie insérée du bobinage ; 3-b : Têtes de bobines et des cercles de phases.....	176
Fig IV. 26: 4 Sous-structures obtenues après découpage.....	176
Fig IV. 27: Qualité de prédiction des méthodes de réduction : critère fréquentiel.....	178
Fig IV. 28: Qualité de prédiction des méthodes de réduction : critère vectoriel.....	178
Fig IV. 29: Gain en temps de calcul CPU des méthodes de réduction.....	179
Fig IV. 30: Effets des incertitudes sur l'évolution des MAC par rapport à la valeur nominale.....	180

Fig IV. 31: Effets des incertitudes sur l'évolution des fréquences propres par rapport à la valeur nominale	180
Fig IV. 32: Dispersion des fonctions de réponses fréquentielles : modèle industriel, propagation des incertitudes par approche hybride (ddl d'observation 1 sur carcasse)	181
Fig IV. 33 : Dispersion des fonctions de réponses fréquentielles : modèle industriel, propagation des incertitudes par approche hybride (ddl d'observation 2 sur empilement tôles)	181

Liste des tableaux

Tab III. 1: Description de la chaîne d'instrumentation.....	55
Tab III. 2: Caractéristiques des capteurs	56
Tab III. 3: Définition des courbes de fonction de transfert	59
Tab III. 4: Fréquences propres (Hz) et amortissements modaux (%) identifiés.....	61
Tab III. 5: Déformées modales expérimentales.....	62
Tab III. 6: Amortissements modaux des 6 premiers modes du stator bobiné.....	67
Tab III. 7: Bilan de la confrontation entre les essais dynamiques sur deux stators de même série.....	69
Tab III. 8: Hypothèse d'homogénéisation : confrontation mesure-calcul	76
Tab III. 9: Définition des matériaux des modèles I, II, III et IV	79
Tab III. 10: Représentations géométriques des modèles II, III et IV	79
Tab III. 11: Corrélation fréquentielle : Mesure - Modèle I	81
Tab III. 12: Corrélation fréquentielle : Mesure - Modèle II	81
Tab III. 13: Corrélation fréquentielle : Mesure - Modèle III.....	81
Tab III. 14: Corrélation fréquentielle : Mesure - Modèle IV.....	81
Tab III. 15: Paramétrage du modèle du stator nu	86
Tab III. 16: Définition des paramètres dans les 4 zones du bobinage	89
Tab III. 17: Variation des paramètres après recalage (cas d'homogénéisation 4).....	94
Tab III. 18: Bilan des performances du recalage (cas de l'homogénéisation 4).....	96
Tab III. 19: Variation des paramètres après recalage (cas de l'homogénéisation 2).....	96
Tab III. 20: Bilan des performances du recalage (cas de l'homogénéisation 2).....	97
Tab III. 21: Variation des paramètres après recalage (cas d'homogénéisation 3).....	98
Tab III. 22: Bilan des performances du recalage (cas d'homogénéisation 3)	99
Tab III. 23: Variation des paramètres après recalage (bobinage).....	100
Tab III. 24: Bilan des performances du recalage (bobinage)	100
Tab III. 25: Principales variantes entre les architectures de type 1 et 2	102
Tab III. 26: Caractéristiques techniques de la suspension métallique (stator architecture 2).....	104
Tab III. 27: Modes propres identifiés (Hz).....	106
Tab III. 28: Déformées modales mesurées	107
Tab III. 29: Masse des composants du modèle de stator d'architecture 2.....	108
Tab III. 30: Matériaux du bobinage et de l'empilement feuilleté.....	108
Tab III. 31: Bilan de la confrontation mesure- calcul du stator d'architecture 2.....	110
Tab III. 32: Fréquences propres de la zone du bobinage étudiée (stator architecture 2, têtes de bobines côté cercles de phase)	114
 Tab IV. 1: Propriétés du modèle académique	 155
Tab IV. 2: Dispersion sur les paramètres incertains sélectionnés pour le cas académique du portique	168
Tab IV. 3: Nombre de modes des méthodes de réduction pour chaque cycle de réanalyse.....	169
Tab IV. 4: Dispersion des fréquences et modes propres dues aux incertitudes	179

Liste des principales notations et abréviations

Abréviations

CA	<i>Combined Approximations method</i>
CB	<i>Craig-Bampton</i>
ddl (s)	Degré (s) de liberté
DVS	Décomposition en Valeurs Singulières
G	<i>Guyan</i>
GCA	<i>Generalised Combined Approximations method</i>
FRF (s)	Fonction (s) de Réponse Fréquentielle
MAC	<i>Modal Assurance Criterion</i>
MEF (s)	Modèle (s) Eléments Finis
SRVE	<i>Static Residual Vectors Enrichment method</i>

Notations générales

A	Représentation générique d'une matrice (M , C ou K)
$c(\omega)$	Vecteur aléatoire des coordonnées généralisées
\mathbf{C}^m	Espace des vecteurs complexes
C_0, M_0, K_0	Matrices nominales d'amortissement, de masse et de raideur
C, M, K	Matrices aléatoires d'amortissement, de masse et de raideur
$E\{ \}$	Espérance mathématique
E	Module de Young
EI	Rigidité à la flexion
f	Vecteur des forces de jonction
$f_{\Delta}(\omega)$	Vecteur des efforts relatifs aux modifications du modèle
$F_{\Delta}(\omega)$	Base des chargements statiques
I_N	Matrice identité de dimensions (N x N)
I	Moment d'inertie quadratique
\mathbf{L}^T	Matrice triangulaire supérieure issue de la factorisation de Cholesky de la matrice A
$\Delta M, \Delta K$	Modifications des matrices masse et raideur
r_b^v	Vecteurs issus de la décomposition en série binomiale du $v^{ème}$ vecteur propre

r_b^*	Concaténation des vecteurs r_b^v
R_b	Base de réduction améliorée selon la méthode GCA
R_Δ	Base des vecteurs des résidus statiques (méthode SRVE)
$R^{N,n}$	Espace des matrices réelles de taille $N \times n$
T_0	Base de condensation du modèle nominal
T_s	Base de condensation robuste (sous-structure s)
$y(\omega)$	Vecteur réponse aléatoire

Lettres grecques

δ	Niveau de dispersion non-paramétrique
λ_ν	$\nu^{\text{ème}}$ valeur propre
ρ	Densité (kg.m ⁻³)
Σ	Matrice diagonale contenant des valeurs réelles non-négatives
ω	Pulsation (s ⁻¹)

Indices

$-I$	Inverse
r	Indice relatif aux matrices réduites
T	Transposé

Opérateurs

$\ \bullet\ $	Norme Euclidienne
$\ \bullet\ _F$	Norme de Frobenius

Chapitre I

Introduction Générale

Contexte général

L'entreprise ALSTOM Transport d'Ornans (FMO) est spécialisée dans la conception et la fabrication de machines électriques tournantes pour le matériel roulant ferroviaire, en particulier les moteurs asynchrones de traction.

Parmi les objectifs déterminants pour le constructeur figure la compréhension de certains phénomènes physiques, en statique et en dynamique des structures. Elle permet une meilleure modélisation des moteurs et à terme, l'amélioration de la conception en présence de facteurs mal maîtrisés. Parmi ces facteurs, la nature des matériaux constituant la carcasse de moteurs, le modèle de comportement de l'assemblage du cœur feuilleté du stator, les non linéarités de contact aux différentes jonctions entre sous-structures, la complexité de la modélisation, les nombreuses sources d'incertitudes inhérentes aux processus de fabrication, d'assemblage, aux caractéristiques géométriques et mécaniques,...etc. Tous ces problèmes sont reconnus comme des facteurs déterminants dont la résolution assure la maîtrise de la modélisation et de la simulation du comportement des moteurs en phase de conception.

L'objectif industriel de ce travail est de valider le modèle de la structure d'une machine électrique en effectuant des corrélations calculs-essais dynamiques. Cette validation devra permettre de caractériser les propriétés mécaniques et le comportement d'un assemblage hétérogène à structure compacte dont l'assemblage de tôles feuilletées magnétiques et les bobinages en cuivre sont les principaux constituants.

Ce travail de thèse (convention CIFRE ALSTOM-Transport / Institut FEMTO-st (LMARC)) s'inscrit dans le cadre du projet **SEME** (Simulations et Essais sur Machines Embarquées) de la plateforme de recherche AMIMAC (2007 – 2010).

Prédire le comportement dynamique des stators : un besoin industriel

La maîtrise du calcul prévisionnel du comportement dynamique d'assemblages mécaniques est un enjeu majeur pour les concepteurs et les fabricants industriels. Les outils numériques de conception et de fabrication aidant, la complexité de ces produits s'est vue croître durant les dernières années, complexifiant encore plus les phénomènes physiques mis en jeu. En parallèle avec ce progrès, et notamment à partir des années 70, une réelle avancée technologique dans le domaine informatique a poussé les limites du calcul numérique, permettant notamment à la méthode des Eléments Finis de se développer. Ainsi des modèles éléments finis par exemple de plus en plus fins, des types d'éléments de plus en plus complexes et des méthodes de résolution de plus en plus performantes ont vu le jour. Ceci a permis de tester des hypothèses de modélisation de plus en plus complexes. Cependant, le développement des outils numériques ne signifie pas l'augmentation du savoir même si le premier permet de contribuer fortement au second. Le problème qui reste posé, notamment dans le calcul prévisionnel du comportement mécanique d'assemblages complexes, consiste à dire que si l'on sait résoudre un problème correctement, on ne garantit pas que celui-ci soit bien posé.

Nous citons à ce titre l'exemple d'une des premières tentatives de la mission spatiale APOLLO qui s'est soldée par un échec au décollage. Le problème ne venait pas d'un des différents étages de l'assemblage, conçus séparément, dont le fonctionnement et la fabrication ont été finalement bons,

mais du modèle des interactions entre ces derniers qui pour l'époque n'était pas suffisant et avait failli à prédire certains déplacements. Cet exemple historique nous apprend entre autres que la résolution du problème d'un assemblage relève certes de la compréhension de la physique de ses composants, pris séparément, et de leur assemblage, mais également de la connaissance des limites de certaines hypothèses de modélisation. Par ailleurs, un tel assemblage, conçu « sur mesure » au besoin et fabriqué en très petites séries a amplifié le contexte de la difficulté.

A une autre échelle mais toujours dans un contexte industriel, nous traitons dans ce travail le cas de la modélisation des stators de machines de traction ferroviaires. La maîtrise du comportement dynamique des stators, qui sont des assemblages en soi, est un enjeu majeur pour ALSTOM Transport, tant sur le plan de la compréhension de certains phénomènes physiques, que sur le plan de l'amélioration de la conception en présence de facteurs mal maîtrisés. Ces structures ont la particularité d'avoir un cœur ferromagnétique feuilleté, autrement dit composé de plusieurs centaines de couches métalliques fines empilées et maintenues par une carcasse extérieure. Cet organe hétérogène particulier présente en soi une réelle difficulté au niveau de la compréhension des phénomènes qui régissent son comportement dynamique et au niveau de sa modélisation. Un autre organe du stator vient, par sa particularité, s'ajouter à cette difficulté ; il s'agit des bobinages cuivreux insérés dans le cœur feuilleté. Chaque bobine de cet ensemble a également une structure hétérogène assemblée. Au final, vu dans sa globalité, le stator est un ensemble hétérogène de plusieurs organes dont chacun, à une échelle inférieure, est un assemblage en soi. Le problème est analogue en certains aspects à l'approche méso-macro utilisée lors de l'homogénéisation de certaines structures.

Le problème de la modélisation de ces stators vient se poser dans un contexte où une grande partie de ses organes sont assemblés manuellement, ce qui introduit *a priori* des dispersions importantes. Par ailleurs, ces structures sont fabriquées souvent en petites ou moyennes séries, selon des variantes d'architectures imposées par le besoin industriel.

C'est dans ce contexte général qu'a germé un besoin industriel consistant à établir une modélisation prédictive et fiable du comportement dynamique des stators en basses fréquences, générique, transposable à d'autres architectures, mais également raisonnablement applicable dans un bureau d'études. Les phases de conception y ont en effet une durée limitée qu'il faut savoir respecter.

Il est souvent difficile de garantir qu'un modèle utilisé soit représentatif de la réalité physique des mécanismes étudiés. Dans ce sens, de nombreuses méthodes de confrontation des modèles, en dynamique des structures, avec des résultats expérimentaux ont été développées permettant le recalage des matrices de masse, de rigidité et d'amortissement de ces modèles avec les résultats d'essais en vibrations libres ou forcées. On peut ainsi trouver dans [103] un état de l'art des méthodes de recalage existantes. Les plus utilisées sont celles dites paramétriques pour lesquelles l'ajustement d'un modèle éléments finis (MEF) donné passe par la correction des paramètres physiques, exhaustifs ou non, qui lui ont été affectés [5, 61, 92, 100]. Nous avons eu l'occasion de citer à ce titre la méthode de recalage par sensibilité utilisée au LMARC [77] depuis plusieurs années et pour laquelle il a acquis une bonne expérience.

Dans ce contexte, si la conception d'un modèle prédictif est une première étape, elle ne peut être envisagée que dans la mesure où l'on étudie également les limites de cette prédiction et les incertitudes qui l'entachent. L'étude de la robustesse de cette modélisation dans un contexte d'incertitudes est également un enjeu de ce travail.

La modélisation: première variable du problème

La logique du présent travail, dans le contexte que nous avons décrit, consiste à construire une modélisation prédictive d'un comportement dynamique moyen de l'ensemble de la structure. Des hypothèses sont établies dans une certaine limite de prédiction.

Si une étude des incertitudes doit venir compléter cette prédiction moyenne, elle se base généralement sur les causes incertaines à savoir les paramètres de conception de ce modèle moyen. Classiquement, il est d'usage de considérer que de la prise en compte de la variabilité sur ces paramètres découle l'étude des incertitudes.

Or ces paramètres ne sont que l'image de la réalité physique à travers le modèle. Le choix du modèle et par conséquent de ses paramètres est déterminant dans une étude d'incertitudes.

La figure Fig I.1 illustre un exemple où une même réalité physique complexe est représentée par différents modèles auxquels sont rattachés des paramètres. Il s'agit de la structure d'un empilement feuilleté de tôles séparées entre elles par une fine couche de résine. Le comportement d'une telle structure peut être étudié à des niveaux de détail différents, selon le niveau d'intérêt qui est visé. Plusieurs visions peuvent être abordées. Nous n'en citerons que 4 exemples parmi tant d'autres.

Sur le modèle (a), la géométrie est respectée entièrement et les différentes couches de tôles et de résine sont présentes. Les paramètres accessibles seront dans ce cas ceux relatifs aux différentes couches ainsi que la proportion entre elles.

Sur le modèle (b), la géométrie interne est simplifiée et les formes en « denture » sont remplacées par une distribution uniforme de masses. Les paramètres de conception « accessibles » seront les valeurs de ces masses ainsi que le matériau de la couronne.

Sur le modèle (c), la structure est étudiée sur la base d'une seule de ses couches représentatives. Seul le mouvement radial est considéré. Les paramètres accessibles sont ceux relatifs à cette seule couche.

Sur le modèle (d), la structure est représentée par un volume homogène orthotrope. Les paramètres introduits sont dans ce cas des coefficients d'orthotropie.

Même si dans tous les cas, le modèle est représentatif dans une certaine limite de la réalité physique moyenne, l'étude des incertitudes sera basée sur le choix des paramètres de chaque modèle.

La perception de l'erreur qui sera simulée sera biaisée par le choix du modèle de départ.

La prise en compte, outre les incertitudes qui sont liées aux paramètres issus du modèle, de l'erreur commise lors du choix de la modélisation, sera un point traité dans ce travail. Une méthode dite non-paramétrique est à ce sujet utilisée pour prendre en compte ce genre d'effets.

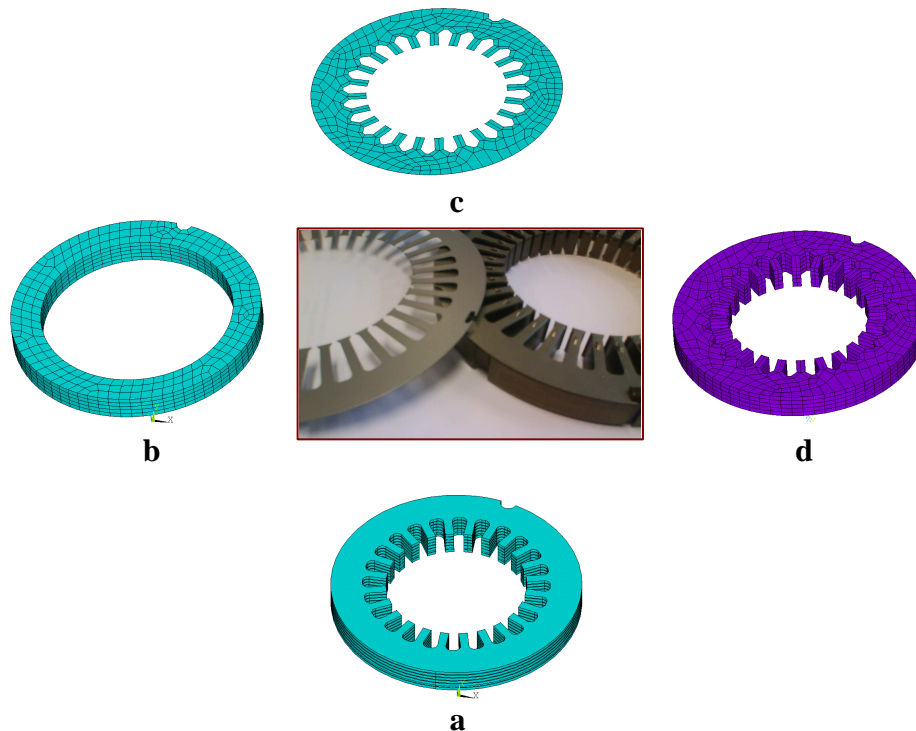


Fig I. 1: Représentation d'une structure d'un empilement feuilleté par différentes modélisations : a- modélisation réaliste en plusieurs couches, b- couronne avec répartition internes de masses, c- modélisation en 2D, d- modélisation homogène orthotrope en 3D,

Contenu du mémoire

L'idée directrice de ce travail est finalement d'établir une modélisation dynamique prédictive à basses fréquences et générique aux différentes architectures des stators de moteurs ferroviaires fabriqués par ALSTOM Transport. L'étude commence par établir une modélisation prédictive du comportement dynamique moyen de ces structures. Elle se base sur une approche directe, permettant de concevoir un modèle dont le comportement est voisin de la dynamique réelle. Elle sera complétée et ajustée par une approche inverse basée sur un recalage de modèle. Une étude d'incertitudes vient compléter par la suite ce choix de modélisation.

- Modélisation générique des stators ferroviaires : approches directe et inverse

Dans le second chapitre de ce mémoire, nous rappelons, outre les relations de base en dynamique linéaire des structures, la méthode d'identification paramétrique et les techniques de recalage aux fins de la résolution d'un problème inverse. Dans la suite de ce chapitre, et afin de formuler le problème direct, nécessaire à la pose du problème inverse, nous exposons une technique d'homogénéisation de matériaux composites qui sera utilisée dans ce travail.

Dans le troisième chapitre nous abordons le premier objectif de ce travail ; à savoir la validation d'un modèle de la structure d'un stator de machine électrique en effectuant des corrélations calculs-essais. Cette validation devra permettre de caractériser les propriétés mécaniques et le comportement d'un tel assemblage hétérogène à structure compacte et dont le cœur ferromagnétique feuilleté et les bobinages tressés sont les principaux constituants. Des essais dynamiques d'analyse modale expérimentale sont réalisés sur différentes structures de stators afin de caractériser le comportement vibratoire.

Une première étude sur une architecture typique de stators est menée pas à pas afin de cerner les effets des comportements des deux organes principaux des stators ; à savoir le cœur ferromagnétique feuilleté d'un côté et les bobinages de l'autre. Cette étude est complétée par un essai sur un autre stator de même architecture. Une estimation de la dispersion de fabrication est obtenue. A la suite de cette première étude où le modèle proposé est validé, des règles de modélisation sont établies. Dans le but de vérifier leur pertinence ainsi que leurs limites de prédiction, nous les avons appliquées sur un autre stator d'architecture complètement différente. Un bilan de cette étude établit les règles retenues qui seront par la suite transférées au bureau d'étude d'ALSTOM Transport sous la forme d'une note de recommandations.

- Propagation des incertitudes

Le contexte industriel de cette étude notamment les caractéristiques des assemblages qui sont pour la plupart manuels et la présence de nombreux phénomènes qu'il est difficile de modéliser entièrement (résine, contraintes résiduelles...etc.), des sources d'incertitudes sont introduites.

Par ailleurs, les hypothèses de modélisation, notamment le choix d'une modélisation homogène équivalente pour l'empilement feuilleté et les bobinages, introduit de fait des limitations et des erreurs de modélisation. Le modèle construit suivant les règles établies au chapitre précédent ne peut être qu'un modèle nominal, prédictif d'un comportement moyen en basses fréquences des stators, devant être complété par une étude d'incertitudes et d'une analyse de robustesse. Celle-ci fait l'objet du quatrième chapitre de ce mémoire.

Il est difficile dans un contexte industriel de garantir qu'un modèle établi soit représentatif de la réalité physique des mécanismes mis en jeu. Ceci est le cas pour les stators de moteurs ferroviaires qui font l'objet de notre étude. Un modèle, même bien recalé, peut ne pas prendre en compte correctement certains phénomènes. Plusieurs types d'incertitudes structurales peuvent entacher ce dernier. Il y'a celles liées aux caractéristiques matérielles (propriétés des résines, qualité des soudures...etc.). Certaines hypothèses simplificatrices ou les choix de modélisation de certaines zones de la structure peuvent entacher d'incertitudes ce modèle. Il y'a également les hypothèses de modélisation des zones

d'interface, des hypothèses d'homogénéisation introduites ou les troncatures au premier ordre de certaines méthodes de résolution. Afin de tenir compte de ces incertitudes, il est nécessaire d'utiliser des méthodes non déterministes, ou probabilistes.

Les incertitudes sont donc globalement classées selon leur nature en deux grandes familles ; à savoir les incertitudes irréductibles, ou aléatoires, et les incertitudes dites réductibles ou épistémiques. La première famille est liée à la variabilité de la structure physique dans son environnement. C'est le cas de la variabilité liée aux propriétés des matériaux, des variations d'assemblages (pressions de maintien, soudures, ...etc.), des variations des conditions environnementales (température...etc.)...La seconde famille est liée aux erreurs de diagnostic du bon phénomène régissant la réalité ou carrément au manque de connaissance de ce phénomène (lois de comportement, troncature lors de résolutions...etc.).

Dans ce chapitre, nous nous basons essentiellement sur des méthodes stochastiques pour propager ces deux types d'incertitudes. Après un rappel des principales méthodes, nous retenons une approche classique de type « paramétrique » basée sur l'étude des réponses déterministes du modèle lorsque certains de ses paramètres varient selon une loi de probabilité. Une deuxième approche, plus globale, dite « non-paramétrique » est introduite afin de prendre en compte essentiellement les incertitudes épistémiques.

Nous proposons ensuite de combiner ces deux méthodes en une approche hybride propageant les incertitudes sur un même modèle en fonction des hypothèses retenues pour chacun de ses composants.

- Sous-structuration et réanalyse approchée robuste

Outre les nombreuses sources d'incertitudes, la grande taille des MEF et les grandes quantités de données, sont considérés comme des problèmes majeurs lors de la phase de conception d'un produit industriel. La propagation des incertitudes en est un exemple type. L'étude de robustesse vient pallier à ce problème et sera abordée dans la suite de ce travail.

Lors de la propagation des incertitudes la structure étudiée subit des modifications sur ses matrices généralisées. Dans ce contexte, la problématique du coût de calcul se pose rapidement. Même si une réanalyse exacte reste la seule référence, elle est souvent remplacée par une réanalyse approchée au prix d'une erreur. En effet ; l'idée de la réanalyse approchée consiste à approximer les réponses de la structure modifiée en se basant sur les solutions du modèle nominal, calculées une seule fois. Nous abordons le problème de réanalyse approchée dans un contexte de réduction de modèles. Dans ce travail, nous nous intéressons particulièrement à la sous-structuration dont nous exposons les principales méthodes.

Ceci nous amène à la notion de robustesse des bases de réduction d'un MEF par rapport à des incertitudes, représentées par des perturbations qu'il peut subir. Ces perturbations sont propagées par les méthodes paramétrique ou non-paramétrique choisies. Nous discutons dans ce travail d'une méthode qui établit un lien entre les niveaux de dispersion de ces deux approches qui ne sont *a priori* pas de la même nature.

Nous discutons ensuite de la manière la plus pertinente pour propager les incertitudes notamment en étudiant l'approche proposée par Soize [128]. La méthode qui y est proposée consiste à propager les incertitudes en partant d'un modèle nominal déjà réduit.

Après une première phase où nous montrons les limites de robustesse d'une méthode de sous-structuration standard, en l'occurrence la méthode de Craig-Bampton, nous proposons de l'améliorer. Deux méthodes sont envisagées ; à savoir la méthode d'enrichissement par des vecteurs de résidus statiques [90] et la méthode des approximations combinées [70, 71, 72] que nous proposons de généraliser et d'étendre à la sous-structuration [30, 85].

Le principe général de ces méthodes consiste à construire des bases de réduction robustes à partir des bases de réduction du modèle nominal et en fonction des modifications introduites sur les matrices de

masse et de raideur du MEF. L'intérêt de ces techniques est de garantir un taux de réduction intéressant tout en assurant une bonne qualité de prédiction sans recourir à un recalcul systématique des bases de réduction.

- Applications numériques

Dans un premier temps, nous mettons en œuvre ces deux méthodes d'amélioration de la robustesse sur un cas académique sur lequel nous propageons les incertitudes successivement par les approches paramétrique et non-paramétrique. Afin de qualifier les performances de ces méthodes de réduction, nous introduisons des niveaux d'incertitudes élevés, du même ordre de grandeur que ceux qui seront envisagés pour le cas du modèle industriel.

Nous discutons de la pertinence de l'utilisation de ces deux méthodes en fonction du modèle d'incertitude introduit (paramétrique ou non-paramétrique). Nous retenons finalement que la méthode généralisée des approximations combinées proposée est la plus adaptée aux deux modèles d'incertitudes.

Dans un second temps, nous menons une étude de robustesse sur un modèle de stator ferroviaire validé. Nous y mettons en œuvre une approche hybride de propagation des incertitudes que nous appliquons dans un contexte de sous-structuration basée sur la méthode de Craig-Bampton. La méthode d'amélioration de la robustesse des approximations combinées généralisées y est introduite et ses performances sont jugées.

A la fin, nous tirerons des conclusions intéressantes le fabricant du stator concernant les effets des dispersions sur le comportement dynamique du modèle validé établi.

Chapitre II

Méthodes directes et inverses

Très souvent abordés, les problèmes inverses sont des situations dans lesquelles on tente de déterminer les causes d'un phénomène à partir des observations expérimentales de ses effets.

La résolution d'un problème inverse passe en général par une étape initiale de modélisation du phénomène, dite problème direct qui décrit comment les paramètres du modèle se traduisent en effets observables expérimentalement. Ensuite, à partir des mesures obtenues sur le phénomène réel, la démarche va consister à approximer au mieux les paramètres qui permettent de rendre compte de ces mesures. Cette résolution peut se faire par simulation numérique, ce qui est le cas aujourd'hui avec l'utilisation généralisée de la méthode des éléments finis. La résolution mathématique est rendue difficile par le fait que les problèmes inverses sont en général des problèmes mal posés, c'est-à-dire que les seules observations expérimentales ne suffisent pas à déterminer parfaitement tous les paramètres du modèle. Il est donc nécessaire d'ajouter des contraintes ou des *a priori* qui permettent de réduire l'espace des possibilités de façon à aboutir à une solution unique.

Dans ce travail, un de nos objectifs est d'établir une modélisation éléments finis fiable des structures mécano-soudées que sont les stators de moteurs ferroviaires. Notre façon de procéder consiste d'abord en la construction d'un modèle numérique avec un certain nombre d'hypothèses formulées *a priori* et qui servent de base de départ à la résolution du problème inverse. Or, des assemblages tels que les stators ferroviaires s'apparentent en beaucoup de points à une structure « composite ». En effet ; le cœur du stator par exemple est un empilement périodique de plusieurs centaines de feuilles d'acier imprégnées de résine et les bobinages sont de leur côté des spires contenant des tubes de cuivre, des isolants et de la résine. Même si ces composants ne sont pas des matériaux composites, au sens conventionnel et commun du terme, il n'en demeure pas moins que leur structure finie est proche de structures rencontrées (composites unidirectionnels, stratifiés périodiques, matériaux orthotropes). Par conséquent, notre démarche a consisté à utiliser les mêmes démarches de caractérisation matérielle, notamment l'homogénéisation, que celles utilisées dans le cas de matériaux composites afin de modéliser quelques composants du stator.

Nous traitons donc, au sein de ce chapitre, dans un premier paragraphe, outre les relations de base en dynamique des structures, la méthode d'identification paramétrique et les techniques de recalage aux fins de la résolution d'un problème inverse. Dans le second paragraphe, et afin de formuler le problème direct, nécessaire à la pose du problème inverse, nous exposons des techniques d'homogénéisation de matériaux composites très utilisées dans la littérature et utilisées dans notre travail.

II.1. Méthodes générales en élastodynamique

II.1.1. Relations de bases en dynamique des structures

Dans ce paragraphe, nous donnons les relations et propriétés, de dynamique des structures utilisées dans ce mémoire.

Nous traitons ici le cas des assemblages mécaniques à comportement linéaire. Or, le traitement de la dynamique de systèmes continus revient souvent à résoudre un problème à N systèmes discrets, auto-adjoints, dissipatifs et linéaires par rapport à leur masse et à leur raideur.

Nous nous intéressons dans ce travail aux cas de systèmes faiblement amortis.

II.1.1.1. Solutions propres du système conservatif

La réponse $y(t)$ d'un système à N ddl's amorti et soumis à une force $F(t)$ vérifie l'équation d'équilibre suivante :

$$M \ddot{y}(t) + B \dot{y}(t) + Ky(t) = F(t) \quad (\text{II.1})$$

où M , B et K sont les matrices masse, amortissement et raideur de taille (N, N) . M est une matrice réelle symétrique définie positive, B et K sont des matrices réelles symétriques semi-définies positives.

Pour un système conservatif, la matrice d'amortissement B est nulle. Dans ces conditions, il n'y a plus aucune dissipation d'énergie dans la structure et sa réponse à une impulsion est permanente. Cela ne correspond à aucune structure réelle mais c'est la démarche la plus couramment utilisée lorsqu'on utilise la méthode des éléments finis car on est en pratique incapable de modéliser de manière prédictive les amortissements.

Le régime libre du système conservatif est donc régi par le système homogène:

$$M \ddot{y}(t) + Ky(t) = 0 \quad (\text{II.2})$$

On cherche une réponse de la forme $y(t) = ye^{j\omega t}$, où $y = y(\omega)$ est le vecteur des réponses en déplacement, $\omega = 2\pi f$, f est la fréquence d'excitation et $j^2 = -1$.

Ceci implique le problème homogène associé :

$$\begin{aligned} [K - \omega^2 M]y(\omega) &= 0 & \text{ou} \\ [K - \lambda M]y(\omega) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Il s'agit d'un système linéaire et homogène qui admet N valeurs propres réelles positives $\lambda_v = \omega_v^2$ auxquelles sont associées N vecteurs propres réels y_v . Ces valeurs sont regroupées respectivement dans les matrices : spectrale diagonale Λ , et modale Y , toutes deux appartenant à $R^{N,N}$, et vérifiant la relation matricielle suivante :

$$KY - MY\Lambda = 0 \quad (\text{II.4})$$

On convient généralement de normer les vecteurs propres réels relativement à la matrice de masse par exemple, tel que:

$$\forall v, y_v^T M y_v = 1 \quad (II.5)$$

Ce qui implique les relations d'orthonormalité suivantes:

$$Y^T M Y = I_N \quad \text{et} \quad Y^T K Y = \Lambda \quad (II.6)$$

où : I_N est la matrice identité de taille (N, N) .

II.1.1.2. Réponse forcée d'une structure conservatrice par superposition modale

La base modale Y étant complète, tout vecteur $y(\omega)$ peut être représenté sur cette base :

$$y(\omega) = Y c(\omega) \quad (II.7)$$

où $c(\omega)$ est le vecteur qui caractérise la participation de chaque mode dans la réponse $y(\omega)$. En appliquant à la relation (II.1), prise dans le cas où la matrice d'amortissement B est nulle, la transformation consistant à multiplier à gauche par Y^T et compte tenu de la relation (II.7), on obtient :

$$Y^T M Y \ddot{c}(\omega) + Y^T K Y c(\omega) = Y^T F \quad (II.8)$$

En tenant compte des relations d'orthonormalité (II.6), la relation (II.8) devient :

$$(\Lambda - \omega^2 I_N) c(\omega) = Y^T F \quad (II.9)$$

Ceci implique:

$$c(\omega) = (\Lambda - \omega^2 I_N)^{-1} Y^T F \quad (II.10)$$

Finalement et à partir de l'équation (II.7), la solution $y(\omega)$ est donnée par :

$$y(\omega) = Y (\Lambda - \omega^2 I_N)^{-1} Y^T F(\omega) \quad \text{et ce : } \forall \omega \neq \omega_v \quad (II.11)$$

Soit en développant :

$$y(\omega) = \sum_{v=1}^N \frac{y_v y_v^T F(\omega)}{\omega_v^2 - \omega^2} \quad \text{et ce : } \forall \omega \neq \omega_v \quad (II.12)$$

Cette méthode de calcul de la réponse forcée par « superposition modale », comme la relation l'illustre clairement et où la réponse forcée est en réalité la somme des contributions des modes du système conservatif, est souvent préférée aux méthodes directes de calcul de la réponse $y(t)$. En pratique, on utilise une base tronquée de n modes et l'on réduit ainsi l'ordre du système à n ddl (n << N).

Au voisinage d'une fréquence propre, remarquons que la réponse forcée en un point d'une structure dépend à la fois :

- du facteur de forme propre du mode au point considéré,
- du facteur de participation modale ($y_v^T F$),
- et de la contribution des modes adjacents.

II.1.1.3. Troncature modale et correction statique

Le calcul de l'intégralité des modes propres n'est pas envisageable dans des calculs éléments finis de type industriel. Dans le cadre d'une analyse dynamique, on se contente d'extraire un certains nombre de modes, correspondant à une bande fréquentielle assez large couvrant la bande fréquentielle d'analyse et de quelques modes d'ordre supérieur, pour constituer ainsi une base modale tronquée.

L'application du principe de superposition modale à partir de cette base incomplète induit inévitablement une erreur due à la troncature et qui affecte par conséquent la qualité des réponses calculées. En effet, toutes les contributions des modes non calculés n'est pas prise en compte lors du calcul de la réponse forcée du système.

Afin d'illustrer la troncature modale, on définit une partition de la matrice modale du système conservatif entre n_1 modes calculés et $n_2 = N - n_1$ modes non calculés que l'on regroupe dans les sous-bases modales correspondantes. Ces sous-bases sont complémentaires et l'on peut écrire :

$$Y = [Y_1 \quad Y_2] \quad (\text{II.13})$$

On définit également une partition de la matrice spectrale associée :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.14})$$

Afin d'améliorer la qualité de calcul tout en utilisant le principe de la troncature modale, il est possible d'élargir la base modale Y_1 . Il est cependant plus judicieux d'appliquer une procédure de correction statique. Celle-ci consiste à approcher dans la réponse forcée la contribution des modes non pris en compte dans la base de projection par leur contribution statique. Ainsi, on néglige dans la réponse forcée, les forces d'inertie associées aux modes de rang élevé devant les forces élastiques.

Pour illustrer ce principe, nous en explicitons la procédure dans le cas de la réponse harmonique. Compte tenu de la partition précédente (II.10 et II.11), la réponse forcée s'écrit :

$$y(\omega) = Y_1(\Lambda_1 - \omega I_1)^{-1} Y_1^T F(\omega) + Y_2(\Lambda_2 - \omega I_2)^{-1} Y_2^T F(\omega) \quad (\text{II.15})$$

En négligeant les termes dynamiques associés aux modes non calculés et de rang élevé, on obtient :

$$y(\omega) \approx Y_1(\Lambda_1 - \omega I_1)^{-1} Y_1^T F(\omega) + Y_2 \Lambda_2^{-1} Y_2^T F(\omega) \quad (\text{II.16})$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$y(\omega) \approx Y_1 q_1 + Y_2 \Lambda_2^{-1} Y_2^T F(\omega) \quad (\text{II.17})$$

$$\text{avec : } q_1 = (\Lambda_1 - \omega I_1)^{-1} Y_1^T F(\omega) \quad (\text{II.18})$$

La quantité matricielle $Y_2 \Lambda_2^{-1} Y_2^T$ est appelée flexibilité statique résiduelle. Elle est également nommée matrice des résidus R . Elle est obtenue en pratique en calculant la flexibilité statique S du système :

$$S = K^{-1} = Y \Lambda^{-1} Y^T \quad (\text{II.19})$$

puis en soustrayant la contribution statique relative aux l_1 modes retenus dans la base Y_1 :

$$R = Y_2 \Lambda_2^{-1} Y_2^T = K^{-1} - Y_1 \Lambda_1^{-1} Y_1^T \quad (\text{II.20})$$

Dans cette procédure, la matrice K est supposée régulière, autrement dit la structure n'a pas de modes de corps rigides, sinon un filtrage de ces modes doit être effectué au préalable.

L'expression de la réponse forcée harmonique devient donc :

$$Z(\omega) \approx Y_1 q_1(\omega) + R F(\omega) \quad (\text{II.21})$$

L'usage de la correction statique garantit une prédiction exacte de la partie statique des réponses. Cette procédure est adaptée pour répondre efficacement au problème de la troncature. Avec un coût de calcul des résidus limité, on privilégie donc son emploi à l'usage d'une base modale étendue.

II.1.1.4. Modélisation des systèmes dissipatifs

Considérons maintenant le Système Dissipatif (SDA) associé à une structure caractérisée par les matrices M , B et K . L'équation d'équilibre dynamique s'écrit :

$$M \ddot{y}(t) + B \dot{y}(t) + K y(t) = F(t) \quad (\text{II.22})$$

La solution couramment utilisée consiste à transformer l'équation (II.19) en un problème différentiel du premier ordre dans l'espace d'état en posant :

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II.23})$$

Nous pouvons écrire alors l'équation du SDA sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} B & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.24})$$

soit une forme :

$$U \dot{x}(t) - A x(t) = \tilde{F}(t) \quad (\text{II.25})$$

où les matrices U et A sont carrées, réelles, symétriques d'ordre $2N$.

Par transformation de Laplace, on obtient :

$$(sU - A)x(s) = \tilde{F}(s) \quad (\text{II.26})$$

La solution de ce problème est abordée de manière classique en résolvant successivement : le problème homogène associé, correspondant au régime libre, et en trouvant une solution particulière, correspondant à la réponse forcée harmonique.

- Le problème aux valeurs propres devient alors dans l'espace d'état :

$$(A - s_\nu U)x_\nu = 0 \quad \nu = 1, 2, \dots, 2N \quad (\text{II.27})$$

Sous réserve que l'amortissement de chaque mode soit inférieur à l'amortissement critique, ce problème admet $2N$ solutions propres apparaissant par paires complexes conjuguées :

$$(s_\nu, x_\nu) \quad \text{et} \quad (\bar{s}_\nu, \bar{x}_\nu) \quad (\text{II.28})$$

où s_ν est la $\nu^{\text{ème}}$ valeur propre complexe. Le vecteur propre associé est $x_\nu = \begin{bmatrix} y_\nu \\ s_\nu y_\nu \end{bmatrix}$ où y_ν est le

$\nu^{\text{ème}}$ vecteur propre complexe du système dissipatif associé à la structure.

Ces caractéristiques modales (s_ν et y_ν) du SDA peuvent être regroupées respectivement dans les matrices spectrales S et Y . Notons par la suite $\underline{S} = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & \bar{S} \end{bmatrix}$ et

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_\nu & \dots & x_{2N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y & \bar{Y} \\ YS & \bar{Y}\bar{S} \end{bmatrix}.$$

La solution générale $x(t)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\{x(t)\} = \sum_{\nu=1}^N \alpha_{1\nu} \{Y\} e^{s_\nu t} + \bar{\alpha}_{1\nu} \{\bar{Y}\} e^{\bar{s}_\nu t} \quad (\text{II.29})$$

Les N constantes $\alpha_{1\nu}$ peuvent être déterminées par les conditions initiales.

- Concernant la solution particulière, un calcul analogue à celui de la réponse forcée harmonique du SCA aboutit à la relation suivante :

$$x(\omega) = \sum_{\nu=1}^N \frac{d y_\nu d y_\nu^T F(\omega)}{j\omega - s_\nu} + \frac{\bar{d} \bar{y}_\nu d \bar{y}_\nu^T \bar{F}(\omega)}{j\omega - \bar{s}_\nu} \quad (\text{II.30})$$

avec la normalisation des vecteurs propres complexes définie par :

$$X^T A X = I \quad (\text{II.31})$$

$$X^T U X = \underline{S} \quad (\text{II.32})$$

La projection de la réponse $y(t)$ sur la base des modes réels du SCA dans l'équation d'équilibre du SDA fait apparaître la matrice β , des amortissements généralisés modaux, réelle et symétrique.

$$\beta = Y^T B Y \quad (\text{II.33})$$

La matrice d'amortissement généralisée est en principe une matrice pleine. On distingue toutefois le cas particulier où elle est diagonale. On parle alors dans ce cas d'amortissement proportionnel. La condition nécessaire et suffisante pour que β soit diagonale s'écrit :

$$B M^{-1} K = K M^{-1} B \quad (\text{II.34})$$

Une condition suffisante est que B satisfasse l'hypothèse de Rayleigh, appelée également hypothèse d'amortissement proportionnel, suivante :

$$B = aM + bK \quad (\text{II.35})$$

L'hypothèse d'amortissement proportionnel conduit enfin à une expression simplifiée de la réponse forcée harmonique du système dissipatif :

$$y(\omega) = \sum_{v=1}^N \frac{y_v y_v^T F(\omega)}{\omega_v^2 + j\omega\beta_{vv} - \omega^2} ; \quad \beta_{vv} = 2a_v\omega_v \quad (\text{II.36})$$

Cette formulation permet de mettre en évidence la contribution de chaque mode du Système Conservatif Associé dans la réponse forcée. En pratique, les amortissements sont peu ou mal connus dans les structures mécaniques et il est délicat de se lancer dans une modélisation d'une matrice d'amortissement généralisée non diagonale. Les amortissements modaux a_v sont généralement issus de l'identification expérimentale et sont ensuite introduits empiriquement dans les modèles numériques. Les prévisions de comportement sont ensuite basées sur la relation de superposition modale précédente.

II.1.2. Identification paramétrique en élastodynamique linéaire

Nous présentons dans ce chapitre une approche générale des principales étapes de l'identification paramétriques des propriétés matérielles d'une structure à partir d'essais dynamiques. Il s'agit ici d'exposer la formulation mathématique de la démarche en mettant en exergue les différentes étapes. C'est ainsi que nous mettons l'accent sur la méthode de recalage en dynamique des structures, particulièrement celle basée sur la méthode de sensibilité, la réanalyse des solutions propres et la recherche des paramètres optimaux.

II.1.2.1. Méthodes de recalage en élastodynamique

L'établissement d'un modèle prédictif et fiable de la dynamique d'une structure peut être abordé de deux manières :

- 1- *L'identification directe* : elle consiste à construire un modèle de représentation du comportement dynamique à partir des seuls essais. Elle consiste à obtenir une réponse donnée telle que les réponses propres d'une structure (en dynamique) ou sa déformation (en statique) à partir d'excitations à laquelle la structure est soumise. Nous pouvons citer l'analyse modale en dynamique et l'essai de traction en statique.

- 2- *L'analyse* : elle consiste à construire un modèle *de connaissance* tel qu'un modèle éléments finis. Cette démarche est légitime dans le cas où les phénomènes et les relations qui les gèrent soient bien connus et correctement modélisables. L'identification dans ce cas est un complément permettant la correction de certaines approximations ou estimations. Cette procédure de correction correspond à ce qu'on appelle la technique de *recalage de modèles*.

Le recalage consiste à déterminer quels ajustements doivent être apportés au modèle de connaissance du système, initialement estimé par une méthode directe, pour que son comportement dynamique soit le plus proche possible de celui de la structure réelle. Ces ajustements peuvent être introduits de deux manières :

- soit *globalement* sur l'ensemble des matrices K^m , M^m et C^m . La correction est alors purement mathématique et ne correspond pas à une représentation physique sur les paramètres,
- soit *localement*, en agissant sur les variables de conception du système. L'avantage est que dans ce cas, la connectivité et la signification physique du modèle sont respectées. Néanmoins, la correction étant faite sur un nombre restreint de paramètres physiques, elle suppose que les écarts de prédictions ne sont pas dus aux erreurs de modélisation mais uniquement aux erreurs d'estimation des paramètres.

Le problème d'identification paramétrique est au final formulé comme un problème mathématique *inverse*. D'un point de vue pratique, il est traité comme un problème d'optimisation où l'on cherche à minimiser une fonction coût, formée par des résidus exprimant les distances entre le comportement du modèle et celui de la structure réelle.

De nombreuses techniques d'ajustement paramétrique en élastodynamique ont été développées durant les vingt dernières années. Nous pouvons les classer en fonction de la nature de la correction apportée, du type de données traitées et de la fonction coût à minimiser [103].

- a- La réponse peut être apportée sur les réponses temporelles, les réponses fréquentielles ou les paramètres modaux (vecteurs propres, fréquences propres, masses généralisées et amortissement modaux)
- b- La méthode mise en œuvre peut utiliser uniquement les ddls d'observation ou nécessiter une procédure de condensation / expansion.
- c- La fonction objectif (coût) à minimiser peut utiliser des résidus formés à partir : des sorties, des entrées, des entrées et des sorties, des puissances complexes, de l'erreur en loi de comportement ou de formes bilinéaires ou quadratiques.

Nous pouvons énumérer quelques méthodes de recalage en dynamique rencontrées dans la littérature [58, 60, 64, 65, 77, 95, 98, 114, 153] :

i- Méthodes globales : minimisation des normes des matrices de correction ΔK , ΔM (méthode utilisant les multiplicateurs de Lagrange)

ii- Méthodes locales basées sur les fonctions de transferts :

- minimisation d'un résidu formé à partir des puissances complexes [20];
- minimisation d'un résidu basé sur les entrées (résidu en force ou résidu en déplacement) [15] ;

iii- Méthodes locales basées sur les solutions propres :

- minimisation d'un résidu basé sur les entrées (résidu en force) ;
- minimisation d'un résidu basé sur les sorties;
- minimisation d'un résidu mixte entrées-sorties;
- minimisation d'un résidu basé sur l'erreur en loi de comportement ;

De toute évidence, aucune méthode de recalage n'est réellement efficace pour tous les cas de figures rencontrés. Une méthode se révélera mieux adaptée qu'une autre selon l'exploitation du modèle

considéré. Chaque méthode présente des avantages et des inconvénients selon la spécificité du problème. Cependant, pour un cas donné, les points suivants peuvent être intéressants quant au choix de la méthode à utiliser :

- L'efficacité de la mise en œuvre et l'effort de calcul ;
- La linéarisation des équations d'optimisation ;
- Le pré-traitement des données expérimentales (analyse modale) ;
- La sensibilité aux bruits de mesure ;
- La nécessité de la condensation de modèle ou de l'expansion des résultats de mesures [21, 107];
- La possibilité d'une réanalyse exacte ou approchée de la réponse du modèle.

Il existe des aspects généraux communs à toutes les techniques de recalage. Nous présentons dans ce qui suit quelques uns de ces points :

- 1- Préparation et réalisation des essais : ceci englobe le choix des conditions aux limites à adopter, de la bande fréquentielle d'intérêt, le choix des positions optimales des excitateurs et des capteurs [86-107];
- 2- Identification : cette étape regroupe la construction d'un modèle (modèle éléments finis et sous structures) représentatif du comportement dynamique de la structure (estimation initiale des paramètres de conception), le choix d'une stratégie de condensation ou d'expansion, la localisation des défauts dominants, le choix du résidu, le choix de la pondération des solutions propres, le choix d'une réanalyse exacte ou approchée et le choix de la méthode d'optimisation (fonction objectif, algorithme itératif de minimisation).
- 3- Evaluation : cette étape permet de définir un critère d'arrêt au processus itératif d'optimisation. A cet effet, les erreurs, souvent irréductibles sont quantifiées (incertitudes sur les mesures, les erreurs de modélisation) pour que leur niveau soit pris comme un niveau seuil ou un critère d'arrêt. Cette phase regroupe également l'analyse de la convergence de la procédure de recalage, sa précision ainsi que l'unicité de la solution qu'elle propose.

Le choix de la méthode dépend du problème traité et du but à atteindre. Une méthode sur laquelle le LMARC a particulièrement travaillé et y a développé par conséquent une bonne expérience est la méthode de sensibilité. Elle est basée sur la minimisation d'un résidu basé sur les solutions propres qui sont des grandeurs de sorties.

II.1.2.2. Méthode de recalage par sensibilité

Considérons que les solutions propres du modèle éléments finis de la structure soient données par la résolution du problème aux valeurs propres suivant :

$$(K^m - \lambda_v^m M^m) y_v^m = 0 \quad (\text{II.37})$$

Où :

- N : nombre de degrés de libertés du modèle ;
 $K^m \in R^{N,N}$: matrice symétrique semi-définie positive de raideur ;
 $M^m \in R^{N,N}$: matrice symétrique définie positive de masse ;
 $\lambda_v^m = (\omega_v^m)^2$: $v^{\text{ième}}$ valeur propre ;
 $y_v^m \in R^{N,1}$: $v^{\text{ième}}$ vecteur propre associé.

L'exposant « m » indique des quantités relatives au modèle.

Nous adoptons les notations suivantes :

- n : nombre de vecteurs propres calculés ;
- $Y^m \in R^{N,n}$: matrice modale des vecteurs propres y_v^m ;
- $\Lambda^m \in R^{n,n}$: matrice spectrale diagonale contenant les valeurs propres λ_v^m .

La structure réelle étant conservative, nous établissons la base de comparaison mesure/calculs en utilisant les solutions propres du système conservatif associé (SCA) suivant :

$$(K^{ex} - \lambda_v^{ex} M^{ex}) y_v^{ex} = 0 \quad (\text{II.38})$$

où :

- $K^{ex} \in R^{N,N}$: matrice symétrique semi-définie positive de raideur ;
- $M^{ex} \in R^{N,N}$: matrice symétrique définie positive de masse ;
- $\lambda_v^{ex} = (\omega_v^{ex})^2$: $v^{\text{ième}}$ valeur propre ;
- $y_v^{ex} \in R^{N,1}$: $v^{\text{ième}}$ vecteur propre associé.

L'exposant « ex » indique des quantités relatives à l'expérience.

Nous adoptons les notations suivantes :

- d : nombre de modes propres identifiés ;
- $Y^{ex} \in R^{N,d}$: matrice modale des vecteurs propres y_v^{ex} ;
- $\Lambda^{ex} \in R^{d,d}$: matrice spectrale diagonale contenant les valeurs propres λ_v^{ex} ;

Lors de la procédure de recalage, l'objectif est de minimiser les écarts ΔK et ΔM entre les matrices de raideur et de masse du modèle et de la structure :

$$K^{ex} = K^m + \Delta K$$

$$M^{ex} = M^m + \Delta M$$

Nous supposons que le modèle éléments finis est composé de sous-domaines, appelés macro-éléments. Chaque macro-élément comporte des éléments finis dépendants des mêmes paramètres de telle sorte que nous pouvons écrire pour chaque macro-élément « i », de matrices raideur et masse K_i et M_i :

$$K_i = \sum_{e=1}^{ri} K_e^{Elem} \in R^{N,N} \quad \text{et} \quad M_i = \sum_{e=1}^{ri} M_e^{Elem} \in R^{N,N} \quad (\text{II.39})$$

où :

- ri est le nombre d'éléments compris dans le macro-élément « i » ;
- K_e^{Elem} et M_e^{Elem} sont respectivement les matrices raideur et masse associées à l'élément fini e .

Les corrections sont effectuées en agissant sur les p macro-éléments de raideur et les q macro-éléments de masse tels que :

$$K^m = \sum_{i=1}^p k_i K_i \quad \text{et} \quad M^m = \sum_{i=1}^q m_i M_i \quad (\text{II.40})$$

où :

- k_i et m_i sont respectivement les coefficients de correction que l'on cherche à estimer ;
- K^m et M^m sont respectivement les matrices de raideur et de masse assemblées du modèle.

Dans les expressions (II.37), nous notons que les corrections interviennent linéairement dans les matrices raideur et masses. Si besoin est, chaque macro-élément peut être constitué par des termes provenant d'énergie de type différent (flexion, torsion, cisaillement...).

Un résidu est construit à partir des distances entre les solutions propres identifiées sur la structure et calculées par le modèle éléments finis. Concernant les déformées propres, ce résidu est évalué sur les degrés de liberté des c capteurs. Ceci s'exprime par :

$$\begin{aligned}\Delta y_v &= y_v^{ex} - y_v^m & \text{avec : } \Delta y_v &\in R^{c,1} & \text{et } v = 1, \dots, d \\ \Delta \lambda_v &= \lambda_v^{ex} - \lambda_v^m & \text{avec : } \Delta \lambda_v &\in R & \text{et } v = 1, \dots, d\end{aligned}$$

La méthode de sensibilité consiste à exprimer les distances en fonction des variations des paramètres de conception des macro-éléments. Pour cela, nous effectuons un développement en série de Taylor au premier ordre au voisinage des solutions propres appariées du modèle :

$$y_v^{ex} = y_v^m + \sum_{i=1}^p \frac{\partial y_v^m}{\partial k_i} dk_i + \sum_{j=1}^q \frac{\partial y_v^m}{\partial m_j} dm_j \quad (\text{II.41})$$

$$\lambda_v^{ex} = \lambda_v^m + \sum_{i=1}^p \frac{\partial \lambda_v^m}{\partial k_i} dk_i + \sum_{j=1}^q \frac{\partial \lambda_v^m}{\partial m_j} dm_j \quad (\text{II.42})$$

Sous forme matricielle cela donne :

$$\Delta y_v = y_v^{ex} - y_v^m = S_y \Delta p, \quad (\text{II.43})$$

qui s'écrit encore :

$$\Delta y_v = S_y \Delta p, \quad v = 1, \dots, d \quad (\text{II.44})$$

où :

$$S_y = \left[\frac{\partial y_v^m}{\partial k_1} \dots \frac{\partial y_v^m}{\partial k_p}; \frac{\partial y_v^m}{\partial m_1} \dots \frac{\partial y_v^m}{\partial m_p} \right] \text{ est une matrice de taille } (c, p+q)$$

$$\text{et : } \Delta p = \begin{bmatrix} dk_1 \\ \vdots \\ dk_p \\ dm_1 \\ \vdots \\ dm_q \end{bmatrix} \text{ est un vecteur de taille } (p+q, 1)$$

Il en est de même pour les valeurs propres :

$$\Delta \lambda_v = \lambda_v^{ex} - \lambda_v^m = S_\lambda \Delta p \quad (\text{II.45})$$

$$\Delta \lambda_v = S_\lambda \Delta p, \quad v = 1, \dots, d \quad (\text{II.46})$$

où :

$$S_\lambda = \left[\frac{\partial \lambda_v^m}{\partial k_1} \dots \frac{\partial \lambda_v^m}{\partial k_p}; \frac{\partial \lambda_v^m}{\partial m_1} \dots \frac{\partial \lambda_v^m}{\partial m_p} \right] \text{ est une matrice de taille } (c, p+q),$$

$$\text{et : } \Delta p = \begin{bmatrix} dk_1 \\ \vdots \\ dk_p \\ dm_1 \\ \vdots \\ dm_q \end{bmatrix} \text{ est un vecteur de taille } (p+q, 1)$$

Nous faisons l'hypothèse que les dérivées partielles des vecteurs propres par rapport aux paramètres de masse et de raideur peuvent s'exprimer dans la sous-base $Y^m \in R^{N,n}$ formée par n vecteurs propres du modèle. Autrement dit, nous effectuons une approximation par combinaison linéaire des vecteurs propres de la base modale incomplète constituée de n vecteurs ($n \ll N$) Y^m . Le calcul qui suit est relativement classique.

L'introduction des relations d'orthonormalité suivantes :

$$(Y^m)^T K^m Y^m = \Lambda^m \quad (\text{II.47})$$

$$(Y^m)^T M^m Y^m = I_m \quad (\text{II.48})$$

conduit aux expressions finales :

$$\frac{\partial y_v^m}{\partial k_i} = Y^m t_v = \sum_{\sigma=1}^n y_\sigma^m t_{\sigma v}^i \quad (\text{II.49})$$

$$\frac{\partial y_v^m}{\partial m_j} = Y^m a_v = \sum_{\sigma=1}^n y_\sigma^m a_{\sigma v}^j \quad (\text{II.50})$$

$$\frac{\partial \lambda_v^m}{\partial k_i} = y_v^{mT} K_i^m y_v^m \quad (\text{II.51})$$

$$\frac{\partial \lambda_v^m}{\partial m_j} = -\lambda_v^m y_v^{mT} M_j^m y_v^m \quad (\text{II.52})$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{\sigma\nu}^i = -\frac{y_{\sigma}^{mT} K_i^m y_{\nu}^m}{\lambda_{\sigma}^m - \lambda_{\nu}^m}, \sigma \neq \nu \\ t_{\nu\nu}^i = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{\sigma\nu}^j = \lambda_{\nu}^m \frac{y_{\sigma}^{mT} M_j^m y_{\nu}^m}{\lambda_{\sigma}^m - \lambda_{\nu}^m}, \sigma \neq \nu \\ a_{\nu\nu}^j = -\frac{1}{2} y_{\sigma}^{mT} M_j^m y_{\nu}^m \end{array} \right. \quad (\text{II.53})$$

En regroupant les expressions (expressions matricielles), nous obtenons la relation de sensibilité :

$$\begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \vdots \\ \Delta y_p \\ \Delta \lambda_1 \\ \vdots \\ \Delta \lambda_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial k_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial k_p} & \frac{\partial y_1}{\partial m_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial m_q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial k_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial k_p} & \frac{\partial y_m}{\partial m_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial m_q} \\ \hline \frac{\partial \lambda_1}{\partial k_1} & \cdots & \frac{\partial \lambda_1}{\partial k_p} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial m_1} & \cdots & \frac{\partial \lambda_1}{\partial m_q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \lambda_m}{\partial k_1} & \cdots & \frac{\partial \lambda_m}{\partial k_p} & \frac{\partial \lambda_m}{\partial m_1} & \cdots & \frac{\partial \lambda_m}{\partial m_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dk_1 \\ \vdots \\ dk_p \\ dm_1 \\ \vdots \\ dm_q \end{bmatrix} \quad (\text{II.54})$$

ce qui peut s'écrire sous forme contractée comme ceci:

$$\begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_y^k & S_y^m \\ S_{\lambda}^k & S_{\lambda}^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p^k \\ \Delta p^m \end{bmatrix} \quad (\text{II.55})$$

$\Delta Z \qquad S \qquad \Delta p$

où les dimensions des trois matrices sont respectivement :

$$[(d(c+1), 1)], \qquad [(d(c+1), p+q)], \qquad [p+q, 1]$$

Rappelons que :

- d est le nombre de vecteurs propres identifiés ;
- c est le nombre de degrés de liberté instrumentés ;
- p est le nombre de macro-éléments de raideur ;
- q est le nombre de macro-éléments de masse ;
- N est le nombre de degré de liberté du modèle éléments finis ;
- n est le nombre de vecteurs propres calculés du modèle éléments finis.

Dans la matrice de sensibilité S , les expressions des dérivées premières des solutions propres par rapport aux paramètres de raideur et de masse sont obtenues en dérivant l'équation d'équilibre du modèle :

$$(K^m - \lambda_{\nu}^m M^m) y_{\nu}^m = 0 \quad (\text{II.56})$$

Afin d'améliorer le conditionnement de la matrice de sensibilité S , nous devons opérer sur des quantités adimensionnelles. Nous procédons alors aux opérations suivantes :

- les équations relatives à $\Delta\lambda_v$ sont divisées par : $1/2.(\lambda_v^{ex} + \lambda_v^m)$ avec $v = 1, \dots, d$,
- les équations relatives à Δy_v sont divisées par : $1/2c.(\|y_v^{ex}\| + \|y_v^m\|)$ avec $v = 1, \dots, d$.

c (nombre de capteurs) représente ici un coefficient de pondération des déformées propres.

La relation $\Delta Z = S.\Delta p$ repose sur l'hypothèse que les termes de dérivées du second ordre sont négligés par rapport à ceux du premier ordre. Cette approximation exige alors d'effectuer un calcul itératif de la solution Δp , en réactualisant les solutions propres et la matrice de sensibilité à chaque itération.

II.1.2.2.1. Placement optimal des degrés de liberté capteurs pour le recalage

Le choix des ddl capteurs est une étape majeure dans la procédure de recalage. En effet, si le modèle éléments finis possède un nombre élevé de ddl, en pratique, on ne peut instrumenter qu'un nombre limité de points, d'où la nécessité de bien choisir la localisation des capteurs sur la structure. La sélection optimale des capteurs dépend de l'objectif poursuivi : observabilité, expansion, condensation, localisation des défauts dominants, meilleur conditionnement de la matrice de sensibilité...etc. Il existe donc différentes techniques de sélection qui peuvent exploiter l'énergie cinétique ou de déformation, le bruit de mesure ou directement la matrice modale [1,57,69].

L'objectif ici est d'obtenir une base de données « la plus orthogonale » possible. Ceci permettra la comparaison entre les déformées modales calculées et celles identifiées sur la structure. La méthode présentée ici est une étape de préparation aux essais en vue du recalage. Nous procéderons ensuite à la reconnaissance des modes propres de la structure, en l'occurrence, par l'intermédiaire d'une matrice modale la plus linéairement indépendante possible. La méthode consiste à exploiter la matrice modale Y^m avec une minimisation du nombre de conditionnement numérique. La construction, ligne par ligne de la matrice $Y^m \in R^{c,n}$, $c > n$ est présentée [1,107] ici :

- **Choix des ddl prépondérants et du premier ddl capteur :** Pour un nombre n donné de vecteurs de base, on forme les vecteurs déplacements de chaque ddl i sur n modes :

$$y_i^m = [y_{i1}^m, y_{i2}^m, \dots, y_{in}^m] \in R^{1,n} \quad (II.57)$$

où y_{ij}^m est le déplacement du ddl i pour le mode j . Par évaluation des normes des vecteurs y_i^m , on élimine les ddl non observables ainsi que les ddl à faibles déplacements, définis par :

$$\|y_i^m\| < 1/2. \max_k (\|y_k^m\|) \quad (II.58)$$

Le premier ddl retenu y_l^m est celui qui maximise la norme de y_i^m

- **Choix du $p^{ème}$ ddl capteur :** On construit toutes les matrices $Y_{2k}^m \in R^{2,n}$, avec tous les ddl retenus :

$$Y_{2k}^m = \begin{bmatrix} y_1^m \\ y_k^m \end{bmatrix} \quad (II.59)$$

On détermine le rang et le nombre de conditionnement de toutes les matrices Y_{2k}^m . Le deuxième ddl retenu sera le ddl qui maximise le rang et minimise le nombre de conditionnement de Y_{2k}^m .

On construit ensuite toutes les matrices $Y_{pk}^m \in R^{p,n}$, avec $k \neq 1, k \neq 2, \dots$

$$Y_{pk}^m = \begin{bmatrix} y_1^m & y_2^m & \dots & y_k^m \end{bmatrix}^T \quad (\text{II.60})$$

On évalue le conditionnement et le rang de toutes les matrices Y_{pk}^m que l'on peut former. On retient à chaque itération les ddls qui maximisent le rang et minimisent le conditionnement de Y_{pk}^m .

- **Choix du nombre c de ddls capteurs retenus :** Le nombre c de ddls retenus est déterminé à partir de l'observation de l'évolution du rang et du conditionnement de Y^m , en fonction du nombre s de ddls sélectionnés (figure II.1)

Le nombre c de ddls retenus est choisi dans la zone de faible pente de $Cond(Y^m)$ avant la stabilisation.

En présence de contraintes techniques, nous pouvons être amenés à imposer certains emplacements de capteurs. Dans ce cas, le procédé de sélection est similaire. Partant des capteurs imposés, nous sélectionnons les ddls suivants, l'un après l'autre, de manière à construire pas à pas la matrice Y^m de conditionnement minimal.

Dans la méthode de minimisation du conditionnement, les ddls sélectionnés dépendent du choix du premier ddl ou des ddls imposés, ce qui peut donc conduire à plusieurs familles de solutions. Par ailleurs, la méthode ne permet pas d'éviter a priori des concentrations de capteurs sur des points spatiaux voisins. Ces aspects nous révèlent le caractère numérique de la technique. Il n'y a pas ou peu de considérations physiques qui permettent, par exemple, une représentation des énergies cinétique ou de déformation.

La recommandation qui s'impose est donc d'associer le choix mathématique proposé par la méthode à l'intuition et l'expérience de l'opérateur. En effet, une observation judicieuse des déformées du modèle éléments finis peut fournir des informations intéressantes sur des choix techniques.

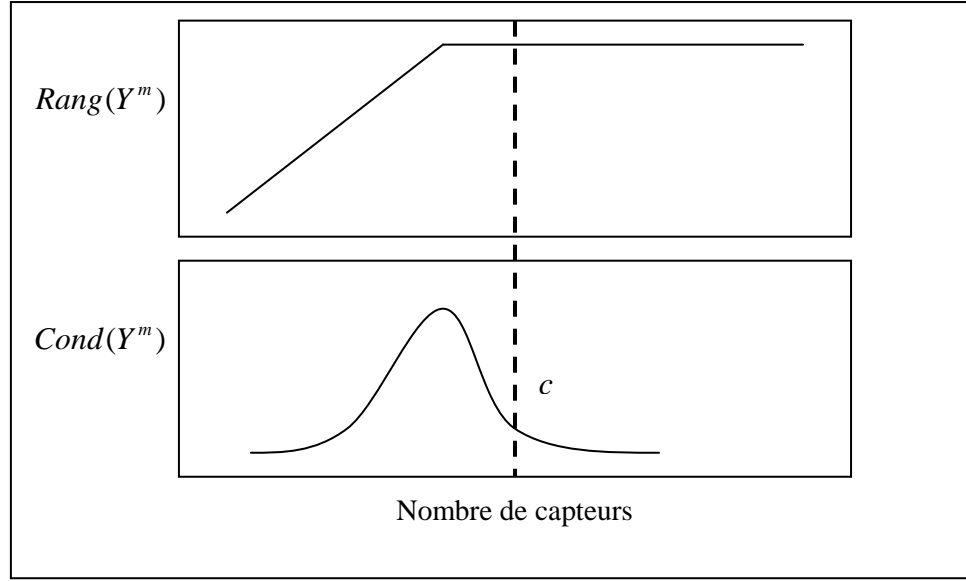


Fig II. 1: Evolution du rang et du conditionnement de Y^m en fonction du nombre de capteurs c

II.1.2.2.2. *Prise en compte des erreurs de masses généralisées*

La définition du résidu des vecteurs propres implique une normalisation correcte des vecteurs propres identifiés, condition difficile à satisfaire en identification modale expérimentale. Les erreurs d'identification des masses généralisées peuvent alors se traduire par un $\Delta Z \neq 0$, ce qui générera des corrections inopportunes du modèle. Pour contourner cette difficulté, on introduit les masses généralisées comme inconnues supplémentaires. Désignons par \tilde{y}_v^{ex} le vecteur propre identifié sans erreur de norme et par y_v^{ex} celui réellement obtenu. On suppose alors que :

$$\tilde{y}_v^{ex} = y_v^{ex} (1 - \alpha_v), \quad \alpha_v \text{ étant un réel inconnu.}$$

L'équation de sensibilité des vecteurs propres devient :

$$\Delta y_v = \tilde{y}_v^{ex} - y_v^{ex} = S_{y_v} \Delta p \quad (\text{II.61})$$

$(1 - \alpha_v) \tilde{y}_v^{ex} - y_v^{ex} = S_{y_v} \Delta p$, ou sous sa forme matricielle :

$$\Delta y_v = \tilde{y}_v^{ex} - y_v^{ex} = [S_{y_v} | y_v^{ex}] \begin{bmatrix} \Delta p \\ \alpha_v \end{bmatrix} \quad (\text{II.62})$$

Le système complet à résoudre s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \vdots \\ \Delta y_m \\ \hline \Delta \lambda_1 \\ \vdots \\ \Delta \lambda_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & S_y^k & S_y^m & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \vdots & S_\lambda^k & S_\lambda^m & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_1^{ex} \\ \vdots \\ \Delta y_m^{ex} \\ \hline \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} \quad (II.63)$$

II.1.2.2.3. Appariage des modes

Le critère d'appariage entre les solutions propres calculées et identifiées est basé sur une technique de projection des modes mesurés $Y^{ex} \in R^{c,m}$ sur une sous-base de modes calculés $Y^m \in R^{c,n}$. La projection s'effectue uniquement sur une base de modes voisins du point de vue d'une fréquence propre, par l'intermédiaire d'une largeur de bande fréquentielle choisie :

$$Y^{ex} = Y^m Q \quad (II.64)$$

où : $Q \in R^{n,m}$ est la matrice de projection.

Un mode mesuré sera considéré comme apparié avec un mode calculé si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- La composante la plus grande dans la colonne correspondante de Q est supérieure à un seuil donné (0.75 par exemple) ;
- L'écart entre la plus grande composante et la suivante est suffisamment important (2 par exemple).

II.1.2.2.4. Réanalyse des solutions propres

Dans la procédure de recalage par sensibilité, les corrections du modèle sont effectuées de manière itérative. Ceci requiert la résolution des équations de sensibilité ainsi que la réactualisation des solutions propres à chaque itération. Or, en pratique, les modèles éléments finis possèdent souvent un nombre important de degrés de libertés, ce qui rend très coûteuse la résolution exacte du problème aux valeurs propres au cours des itérations. Pour cette raison, on fait souvent appel à des procédures de réanalyse approchée qui passent par la réduction de la taille des modèles.

Le problème de la réduction du système s'inscrit dans le contexte général de la condensation de modèles. Bien qu'il ne faille pas restreindre les méthodes de condensation dans une classification stricte, on peut dégager néanmoins deux voies principales :

- les méthodes qui préservent un ensemble réduit de degrés de liberté physiques telles que la condensation dynamique exacte et la condensation statique de Guyan ;

- les méthodes qui introduisent des coordonnées généralisées telles que les méthodes de Ritz.

Ces dernières (méthodes de Ritz) proposent de trouver les solutions propres du modèle modifié par la connaissance des solutions initiales et des modifications structurales apportées au modèle. Ces techniques ont l'avantage d'être relativement simple à mettre en œuvre et de garantir une bonne précision.

Soulignons que dans le contexte du recalage, l'application des méthodes de Ritz s'avère intéressante lorsqu'un compromis est trouvé entre le gain de temps et la précision requise.

L'équation d'équilibre du modèle modifié associé est donnée par :

$$[(K + \Delta K) - \tilde{\lambda}_v (M + \Delta M)] \tilde{y}_v = 0 \quad (\text{II.65})$$

Où ΔK et ΔM appartiennent à $R^{n,n}$ désignent les modification introduites.

La procédure de Ritz est basée sur le principe de la superposition modale et exprime le vecteur propre \tilde{y} sur la base modale complète Y du modèle initial qu'on peut écrire, selon le principe de la troncature modale (II.1.1.3):

$$\tilde{y} = Y_1 c_{1v} + Y_2 c_{2v} = Y_1 c_{1v} + Y_2 c_{2v} \quad (\text{II.66})$$

où $c_{1v} \in R^{m,1}$ et $c_{2v} \in R^{n-m,1}$ sont des vecteurs de coordonnées généralisées, associés respectivement aux modes retenus contenus dans la sous-base Y_1 et aux modes non-retenus (de rang élevé) contenus dans la sous-base Y_2 .

Le problème modifié (II.62) devient donc:

$$[(\Lambda_1 + Y_1^T \Delta K Y_1) - \tilde{\lambda}_v (I + Y_1^T \Delta M Y_1)] c_{1v} + [(Y_1^T \Delta K Y_2) - \tilde{\lambda}_v (I + Y_1^T \Delta M Y_2)] c_{2v} = 0 \quad (\text{II.67})$$

$$[(Y_2^T \Delta K Y_1) - \tilde{\lambda}_v (Y_2^T \Delta M Y_1)] c_{1v} + [(\Lambda_2 + Y_2^T \Delta K Y_2) - \tilde{\lambda}_v (I + Y_2^T \Delta M Y_2)] c_{2v} = 0 \quad (\text{II.68})$$

L'approximation que l'on utilise consiste à prendre $\tilde{y} \approx Y_1 c_{1v}$. On néglige ainsi la contribution des solutions propres non-calculées Y_2 . En d'autres termes, on considère que la condition suivante est satisfaite :

$$\| [(\Lambda_1 + Y_1^T \Delta K Y_1) - \tilde{\lambda}_v (I + Y_1^T \Delta M Y_1)] c_{1v} \| \gg \| [(Y_1^T \Delta K Y_2) - \tilde{\lambda}_v (I + Y_1^T \Delta M Y_2)] c_{2v} \| \quad (\text{II.69})$$

On aboutit alors à un problème condensé d'ordre m exprimé par :

$$[(\Lambda_1 + Y_1^T \Delta K Y_1) - \tilde{\lambda}_v (I + Y_1^T \Delta M Y_1)] c_{1v} = 0 \quad (\text{II.70})$$

Ce système permet de déterminer m solutions propres $\tilde{\lambda}_v$ et $\tilde{y}_v = Y_1 c_{1v}$.

Cette procédure de projection modale pure est sensible aux troncatures modales. On doit donc élargir le plus possible la base modale Y_1 . On signale également que plus on monte vers le haut du spectre fréquentiel du problème condensé, plus la précision se dégrade. La méthode donne de bons résultats lorsque les niveaux de perturbations ΔK et ΔM sont relativement faibles. C'est le cas de la procédure de recalage appliquée aux cas des structures de stators étudiées dans ce travail.

Il existe d'autres approches plus perfectionnées qui permettent d'augmenter le niveau de précision des méthodes de Ritz telles que la prise en compte des résidus statiques ou dynamiques de la sous-matrice modale non calculée Y_2 [42].

II.1.2.2.5. Calculs des paramètres pour une solution optimale

Dans le contexte de la correction paramétrique, l'estimation des paramètres inconnus Δp au cours des itérations s'inscrit de manière générale dans le cadre des problèmes d'optimisation. Autrement dit, on cherche en pratique à estimer les corrections à apporter au modèle en minimisant une fonction coût J qu'on construit de telle sorte à exprimer la qualité de la corrélation entre la mesure et le modèle. La stratégie de résolution des problèmes d'optimisation dépend donc de la nature de la fonction coût utilisée. Néanmoins, la plupart des algorithmes performants utilisés aujourd'hui reposent sur des principes analogues. Ainsi, dans le cadre de l'identification paramétrique, il est courant de trouver des méthodes de caractéristiques similaires, dont on peut évoquer quatre aspects importants :

- Le problème d'optimisation peut présenter des optima locaux ;
- L'optimisation avec ou sans contraintes ;
- L'influence des paramètres sur l'évolution de la fonction coût peut être inégale causant ainsi une mauvaise pose du problème. Une étude au préalable de sensibilité du modèle par rapport à ses paramètres est souvent nécessaire.
- Les données observées peuvent être entachées de bruit.

Dans ce qui suit, nous présentons, de manière générale, un rappel concernant ces quatre points. En effet ; il nous a semblé utile de mettre en évidence ces quelques aspects qui jouent un rôle important dans la procédure de recalage. Toutefois, ce paragraphe ne traite pas des détails des formulations et des algorithmes associés à l'optimisation. Nous ne débattons également pas de l'existence, de l'unicité ni de la stabilité d'une solution.

Dans ce paragraphe nous évoquons deux grandes classes de méthodes d'optimisation : les méthodes locales et globales. Leurs principales caractéristiques sont présentées ici :

a- Méthodes locales

Les méthodes locales exploitent les propriétés locales de la fonction coût. Le principe consiste à rechercher la solution Δp correspondant à l'optimum global, par le biais d'un processus itératif, en faisant l'hypothèse que celle-ci est au voisinage de la valeur de recherche initiale. Toutefois, rien ne garantit qu'il n'existe pas d'autres solutions admissibles pour Δp au sens de J . Autrement dit, les méthodes locales sont relativement sensibles aux optima locaux. Pour y remédier, il est conseillé de lancer des optimisations initialisées à différents points de l'espace paramétrique admissible $(p_0^1, p_0^2, p_0^3, p_0^4)$ (Fig II.2). Le but de ceci est de vérifier si les solutions convergent toujours vers la même valeur optimale Δp . Dans le cas contraire, il faudra comparer les meilleures valeurs de J obtenues avec les différentes initialisations afin de retenir les valeurs des paramètres associées à la meilleure valeur de la fonction coût J .

Il est possible que des valeurs très différentes de Δp conduisent à des solutions optimales. Dans ce cas, il sera envisagé que l'incertitude sur les paramètres estimées soit grande [140]. Mais ceci révèle par ailleurs que le modèle est faiblement sensible à certains paramètres contribuant à Δp . Ces paramètres sont en général sélectionnés par une étude préalable de sensibilité. Leurs valeurs nominales doivent cela dit être estimées par une autre approche que celle du recalage et notamment par une méthode directe.

On trouve de nombreuses méthodes d'optimisation locales dans la littérature. Nous pouvons en citer quelques unes qui figurent parmi les plus connues à savoir les méthodes de: Newton, de quasi-Newton, de Gauss-Newton, de Levenberg et Marquardt, des gradients conjugués, de recherche unidimensionnelle, du simplexe...etc.

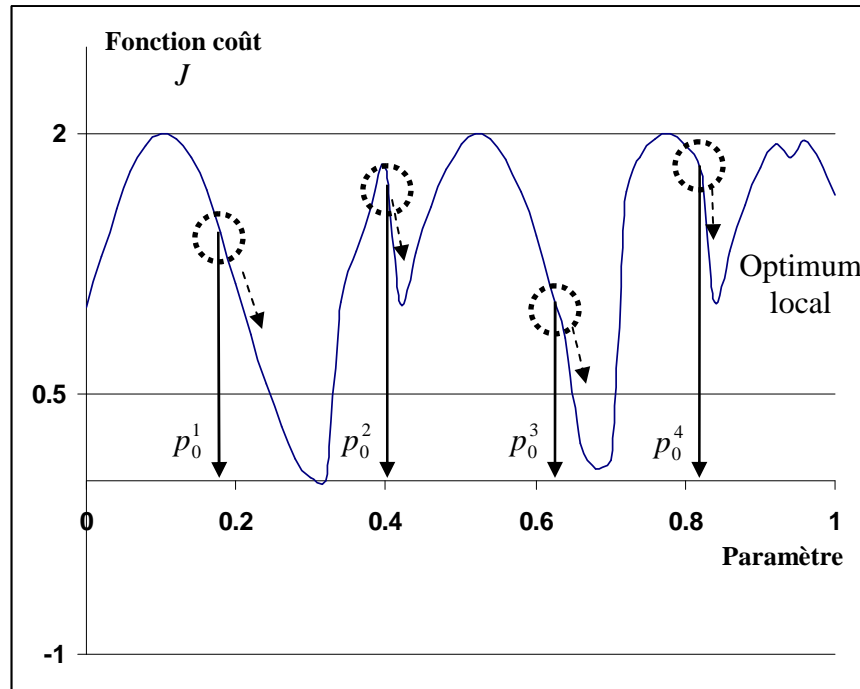


Fig II. 2: Fonction coût et problème des optima locaux

Ces algorithmes permettent de résoudre des systèmes pour lesquels la sortie et la fonction coût sont non-linéaires par rapport aux paramètres. La plupart d'entre eux reposent sur les mêmes principes et donnent de bons résultats à condition que l'on se trouve dans un problème de type quasi-convexe afin d'éviter les phénomènes d'optima locaux.

b- Méthode globales

Dans le cas de l'approche globale le caractère multimodal de la fonction coût rend difficile la détermination des paramètres conduisant à l'optimum global. Les techniques d'optimisation globale ont pour objectif de déterminer l'ensemble des solutions Δp admissibles et de parvenir au final à en sélectionner la meilleure valeur possible de la fonction coût. L'avantage principal qui apparaît par rapport aux méthodes locales est de s'affranchir du problème d'initialisation des valeurs des paramètres. Les techniques d'optimisation globales sont de deux types :

- Approche déterministe : l'utilisation d'intervalles vectoriels (produit cartésien d'intervalles scalaires) permet de remplacer les valeurs ponctuelles de Δp par des sous-ensembles de l'espace paramétrique, ce qui rend possible une analyse globale avec un nombre fini d'opérations. L'approche déterministe garantit les résultats obtenus au prix d'une mise en œuvre complexe, et ceci limite son utilisation.
- Approche aléatoire : à partir du domaine admissible des paramètres, on procède à une recherche via un vecteur aléatoire, avec une grande variance. Ce vecteur offre la possibilité de grands déplacements et permet ainsi de s'affranchir de l'attraction d'un

éventuel minimum local. Cette méthode, bien que simple à mettre en œuvre ne garantit pas toujours de parvenir à l'optimum global.

▪ Contraintes sur les paramètres

Dans les procédures d'optimisation, il peut s'avérer nécessaire de contraindre le vecteur des valeurs estimées dans l'espace paramétrique admissible. Ceci facilite la convergence de la solution, et permet, dans le contexte du recalage, de garder la signification physique des paramètres. On peut dire qu'il existe deux manières d'aborder l'optimisation sous contraintes.

En premier lieu, les méthodes qui permettent, par modification de la fonction coût, de ramener un problème sous contraintes à un problème sans contraintes. L'idée de base de ces techniques consiste à créer une fonction coût modifiée, formée à partir de la fonction coût originelle, en ajoutant les termes représentant les contraintes, sous forme de fonction de pénalisation, associés à des multiplicateurs de Lagrange. Cette méthode, bien que plus simple que les problèmes sous contraintes, a l'inconvénient d'être lente à résoudre et pose des problèmes de mauvais conditionnement.

Une deuxième manière d'envisager l'optimisation sous contraintes est l'utilisation des méthodes de type gradient, basées sur le principe de projection, qui transforme les solutions non-admissibles générées durant la recherche en solutions admissibles. Des techniques plus élaborées déterminent la direction et le gain du pas de recherche. Dans cette catégorie, on peut citer quelques méthodes connues :

- Méthode du gradient contraint;
- Méthode du gradient projeté;
- Méthode de Newton ou quasi-Newton contraints ;
- Méthode des centres ;
- Méthode des directions réalisables ;
- Méthode du polyèdre flexible [66].

▪ Techniques de régularisation

L'une des caractéristiques du recalage de modèles est le caractère mal posé du problème inverse. En effet ; il arrive que dans un problème mal posé, l'estimation soit très sensible à petite modification de données, ce qui nous amène à nous interroger sur l'unicité et la stabilité de la solution. Dans le cadre de la méthode de sensibilité, la non-unicité et l'instabilité des solutions, ou des paramètres de correction, sont directement liés au niveau de dépendance linéaire des colonnes de la matrice de sensibilité. En effet ; dans la matrice de sensibilité, chaque colonne représente un paramètre physique qui doit jouer un rôle bien défini dans l'espace d'observation considéré. Néanmoins, il arrive très souvent que l'on observe une superposition du rôle des paramètres.

Il existe différentes techniques, dites de régularisation, que l'on peut mettre en œuvre pour trouver une solution acceptable aux problèmes mal posés. Ces techniques peuvent être interprétées comme l'introduction d'informations supplémentaires a priori (méthodes préventives) ou a posteriori (méthodes curatives), permettant de régulariser le problème.

La régularisation *a posteriori* du problème mal posé peut être effectuée par des méthodes qui ne modifient pas la dimension du problème :

- **Régularisation par filtrage des valeurs singulières** : un filtre est introduit, qui a pour rôle de minimiser les effets des plus petites valeurs singulières sur l'estimation des paramètres [81] ;
- **Régularisation par modification de la fonction coût** : l'idée dans ce cas est d'introduire des informations supplémentaires qui permettent d'exprimer la confiance accordée aux

estimations initiales des paramètres et aux incertitudes sur les données mesurées. Pour cela, la fonction coût est modifiée en ajoutant des matrices de pondération. Ces matrices ont pour rôle de cadrer ou orienter la solution selon la confiance établie a priori dans les paramètres et les mesures ou encore selon l'influence de chaque paramètre sur le comportement de la structure.

Afin d'exposer l'idée de la pondération, on exprime la fonction coût au sens des estimateurs de type moindres carrés, les plus utilisés. La fonction coût est de la forme générale suivante :

$$J(\Delta Z, \Delta p) = \Delta Z^T W_Z \Delta Z + \Delta p^T W_p \Delta p \quad (\text{II.71})$$

où :

$\Delta Z = Z^{ex} - Z^m \in R^{m(c+1),1}$: est le vecteur des solutions propres ;

$\Delta p = p - p^0 \in R^{p+q,1}$: est le vecteur des paramètres ;

$W_Z \in R^{m(c+1),m(c+1)}$: est la matrice de pondération des solutions propres mesurées ;

$W_p \in R^{p+q,p+q}$: est la matrice de pondération des estimations initiales des paramètres.

Dans l'expression (précédente utilisée), suivant le choix de la pondération, nous avons :

- $W_Z = W_p = 0$, Moindres carrés : les données observées et les paramètres à identifier sont considérés comme déterministes.
- $W_p = 0$, Moindres carrés pondérés : les données observées sont stochastiques et les paramètres sont déterministes.
- W_Z et W_p sont différents de 0 , Moindres carrés bayesiens : les données observées et les paramètres sont considérés comme stochastiques.

D'autres critères comme l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance ou de variance minimale ont des caractéristiques similaires à celles des moindres carrés.

II.1.2.2.6. Choix des matrices de pondération

La manière la plus courante pour déterminer les matrices de pondération W est celle qui reflète la confiance que l'on accorde à l'estimation des paramètres initiaux et des données observées. La pondération, qui peut être faite par W , αW ou $W + \Delta W$, est donnée par :

- $W_Z = \Lambda_{zz}^{-1}$, Λ_{zz}^{-1} est une matrice diagonale, définie positive, contenant les valeurs des variances des solutions propres mesurées ;

- $W_p = \Lambda_{pp}^{-1}$, Λ_{pp}^{-1} est une matrice diagonale, définie positive, contenant les variances des estimations initiales des paramètres.

Ces expressions nous indiquent que l'erreur à un temps donné est pondérée par l'inverse de la variance du bruit associé, autrement dit, on donne d'autant moins de poids à une mesure qu'elle est plus bruitée. On raisonne de manière similaire pour les paramètres initiaux.

Il est possible également de déterminer les coefficients de pondération de façon itérative en fonction des résultats obtenus. Autrement dit, durant la procédure itérative, on peut par exemple augmenter le

poids des coefficients associés aux données situées dans une zone de solution considérée comme satisfaisante et ainsi améliorer le comportement global du modèle. Au niveau des matrices de pondération, ceci peut se traduire par W_z constante et W_p variable au cours des itérations [46].

On peut citer, sans entrer dans le détail, d'autres approches de pondération de la fonction coût, basées sur l'influence de chaque paramètre sur le comportement de la structure [81] :

- Pondération par la sensibilité du résidu aux paramètres ;
- Pondération par la sensibilité des paramètres aux données expérimentales.

Pour conclure quant aux méthodes de régularisation, nous pouvons dire que chaque technique présente à la fois des avantages et des inconvénients. Le vrai problème qui est rencontré en pratique est lié au fait que la pondération requiert une connaissance a priori de la variance, autrement dit de la confiance, que l'on accorde aux paramètres et aux mesures, ce qui bien entendu n'est pas toujours aisé. Il est même parfois recommandé de ne pas utiliser de pondération quand le choix est trop entaché d'incertitudes, afin d'éviter un comportement imprévisible de la fonction coût et donc de la solution du système.

II.1.2.2.7. Méthode utilisée pour l'optimisation

La méthode d'optimisation retenue pour le calcul de la solution Δp dans l'expression de sensibilité ($dz = s.dp$) est du type gradient sous-contraintes inégalités. Le principe de base de la méthode, appelée Méthode des Directions Réalisables Modifiées [38], consiste à déterminer la solution qui minimise la fonction coût $J(p)$, avec l'avantage de préciser la direction et le gain du pas de recherche dans l'espace paramétrique. Cette méthode est du type local, dont les caractéristiques principales ont été décrites précédemment.

La fonction coût est formée à partir des distances entre les solutions propres et les distances des paramètres de correction :

$$J(p) = \Delta y^T(p) W_y \Delta y(p) + \Delta \lambda^T(p) W_\lambda \Delta \lambda(p) + \Delta p^T(p) W_p \Delta p(p) \quad (\text{II.71})$$

soumises aux contraintes d'inégalités,

$$\Delta p_i^{\inf} \leq \Delta p_i \leq \Delta p_i^{\sup} \quad \text{et} \quad p_i^{\inf} \leq p_i \leq p_i^{\sup} \quad (\text{II.73})$$

où :

$\Delta y = y^{ex} - y^m \in R^{mc,1}$ est le vecteur des distances des vecteurs propres ;

$\Delta \lambda = \lambda^{ex} - \lambda^m \in R^{m,1}$ est le vecteur des distances des valeurs propres ;

$\Delta p = p - p^0 \in R^{p+q,1}$ est le vecteur des corrections paramétriques ;

$W_y \in R^{mc,mc}$, $W_\lambda \in R^{m,m}$ et $W_p \in R^{p+q,p+q}$ sont des matrices de pondération, choisies selon la spécificité du problème.

On rappelle que, pour améliorer le conditionnement du système, les vecteurs propres sont divisés par :

$$\frac{1}{2c} (\|y_v^{ex}\| + \|y_v^m\|) \quad \text{et les valeurs propres par :} \quad \frac{1}{2} (\lambda_v^{ex} + \lambda_v^m) \quad v = 1, \dots, d$$

II.1.2.2.8. Bruits de mesure

Plusieurs méthodes sont rencontrées dans la littérature pour caractériser la fiabilité des paramètres estimés vis-à-vis des bruits de mesure.

Une des approches que l'on peut citer est une approche stochastique basée sur la théorie de l'estimation. Le principe de cette méthode est de caractériser de manière théorique les propriétés stochastiques de l'estimation des paramètres, considérés comme des variables aléatoires. Dans ce cas, on considère que les erreurs entachant les données sont modélisées par un vecteur aléatoire de densité de probabilité connue ou paramétrée. L'estimateur associé est construit par des techniques du type maximum de vraisemblance si les hypothèses portent sur la distribution des erreurs, ou de type bayésien si les hypothèses portent également sur la distribution des paramètres. La qualité de l'estimation peut être caractérisée par l'exploitation de la matrice de Fisher. [140].

Toutefois, toutes les méthodes permettant d'évaluer l'incertitude sur les paramètres présentent des inconvénients parfois difficiles à contourner, comme par exemple la détermination de la matrice de covariance du bruit de mesure. C'est pourquoi, afin d'évaluer la robustesse de la technique de sensibilité vis-à-vis des bruits de mesure, nous nous contenterons ici d'introduire des perturbations aléatoires, sur le modèle numérique, sur les solutions propres.

La formulation théorique utilisée ici ne prend pas en compte les aspects physiques de manière distinctes (erreurs systématiques et aléatoires : placement et direction des capteurs, étalonnage...etc.). Les perturbations aléatoires sur les solutions propres mesurées sont formulées de la manière suivante :

- sur les valeurs propres :

$$\lambda_v = \lambda_v^0 \left(1 + r_v \frac{\beta}{100} \right) \quad (\text{II.74})$$

- sur les vecteurs propres :

$$y_v = y_v^0 \left(1 + S_v \frac{\alpha}{100} \right) \quad (\text{II.75})$$

où r_v et S_v sont des suites aléatoires comprises dans l'intervalle $[-1 ; +1]$; α et β sont les pourcentages d'erreur et λ_v^0 et y_v^0 sont respectivement les valeurs et vecteurs propres dits « exacts ».

II.1.2.2.9. Procédure de recalage

Le logiciel informatique AESOP (Analytical-Experimental Structural Optimization Platform) développé au LMARC rassemble un nombre important d'outils permettant de réaliser le processus de recalage par sensibilité notamment l'interface et la communication avec le code de calcul éléments finis, le réglage des paramètres des différents calculs (largeur de bande, résolution des problèmes aux valeurs propres...etc.).

Un schéma général du processus de recalage est présenté (Fig II.3) :

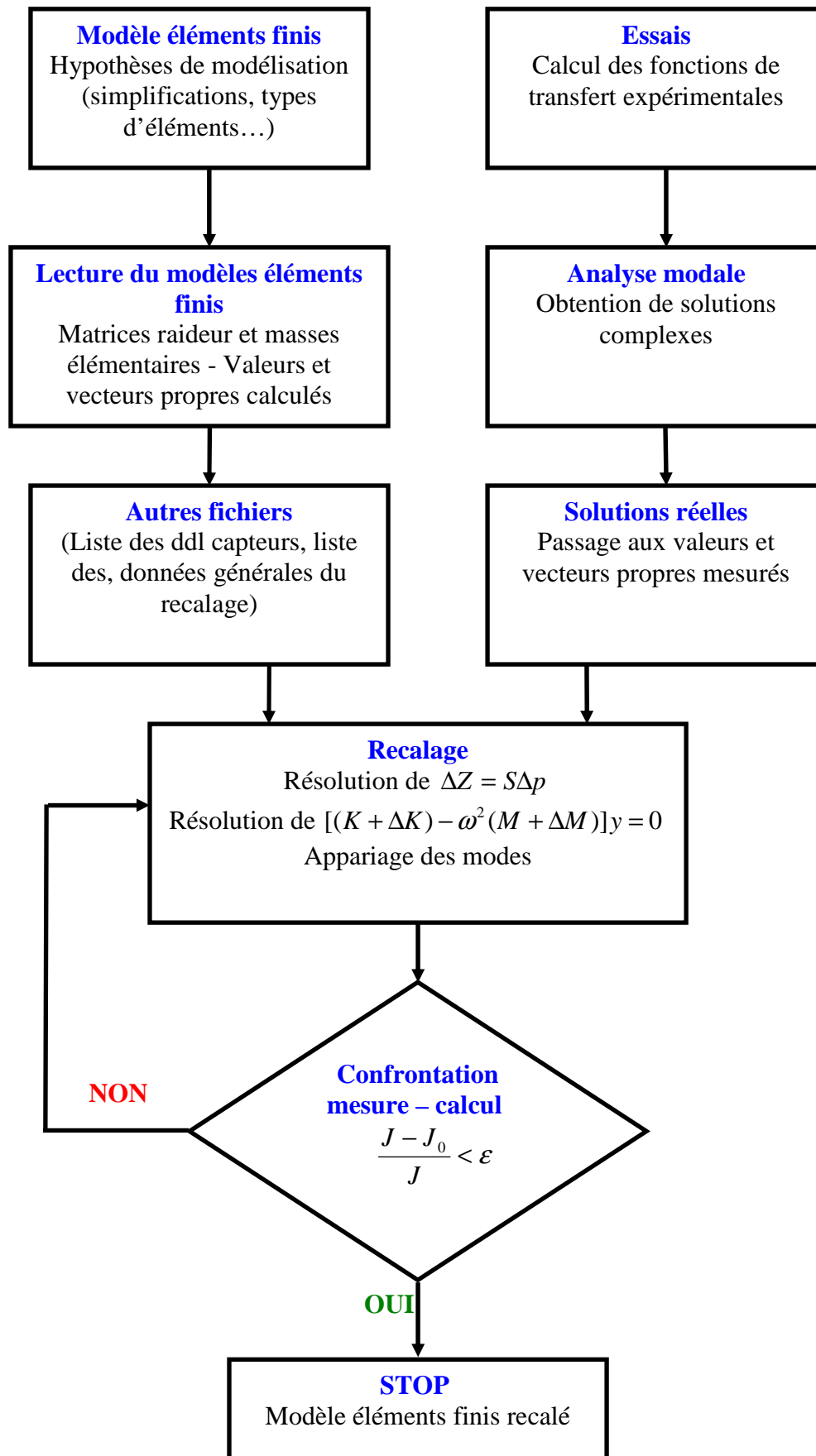


Fig II. 3 : Schéma global d'un processus de recalage

II.2. Rappels sur la théorie de l'homogénéisation des matériaux

Dans ce chapitre, nous effectuons un bref rappel des principales équations constitutives et de caractérisation mécanique des matériaux composites.

Nous mettrons l'accent sur les composites unidirectionnels et les stratifiés orthotropes.

II.2.1. Propriétés générales

Un matériau composite est constitué dans le cas général d'une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue. La phase discontinue, appelé renfort, se présente le plus souvent sous formes de fibres ou autres formes dérivées (tissus, mèches, mats, fils...etc.), tandis que la phase continue, appelé matrice, peut être de nature organique, métallique ou minérale. Dans notre étude, nous aborderons les stratifiés classiques à matrice organique, constitué par des couches identiques.

Les propriétés des matériaux composites stratifiés résultent de la nature des constituants, de leur proportion, de leurs propriétés ainsi que de la géométrie du renfort, de sa distribution...etc. L'arrangement des renforts, continus ou discontinus, permet de moduler les propriétés mécaniques des composites et d'obtenir ainsi des matériaux allant de matériaux fortement anisotropes à des matériaux isotropes dans un plan. Dans ce paragraphe, les couches seront considérées comme étant orthotropes et ce pour rester dans un cas général. Il en résulte que les stratifiés peuvent être de nature orthotrope, isotrope transverse ou quasi-isotrope.

II.2.2. Relations d'élasticité linéaire

Le comportement mécanique d'un matériau composite peut être décrit en introduisant soit les constantes de rigidité C_{ijkl} , soit les constantes de souplesse S_{ijkl} . La loi de comportement ou loi de Hooke généralisée est exprimée par :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} : \varepsilon_{kl} \quad \text{ou} \quad \varepsilon_{ij} = S_{ijkl} : \sigma_{kl} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3$$

avec: C_{ijkl} : tenseur des rigidités, d'ordre 4

S_{ijkl} : tenseur des souplesses, d'ordre 4

Les tenseurs des déformations ε_{ij} et des contraintes σ_{ij} sont des tenseurs d'ordre 2. La complexité des tenseurs des rigidités et des souplesses dépend du degré d'anisotropie du matériau. Le nombre de coefficients indépendants peut varier de 2, dans le cas d'un matériau isotrope, à 21 dans le cas le plus général d'un matériau anisotrope.

II.2.3. Matériau orthotrope

Un matériau est dit orthotrope si ses propriétés mécaniques ou thermiques sont différentes et indépendantes dans trois directions perpendiculaires les unes aux autres. Ainsi, un matériau orthotrope possède trois plans de symétrie.

Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est de 9. Les matrices C et S dans le repère d'orthotropie sont définies par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (\text{II.76})$$

où les expressions des coefficients C_{ij} et S_{ij} sont données en fonction des modules de l'ingénieur :

$$C_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} \quad S_{11} = \frac{1}{E_1} \quad (\text{II.77})$$

$$C_{12} = \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} \quad S_{12} = \frac{-\nu_{12}}{E_1} \quad (\text{II.78})$$

$$C_{13} = \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} \quad S_{13} = \frac{-\nu_{13}}{E_1} \quad (\text{II.79})$$

$$C_{23} = \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} \quad S_{23} = \frac{-\nu_{23}}{E_2} \quad (\text{II.80})$$

$$C_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_2 \Delta} \quad S_{22} = \frac{1}{E_2} \quad (\text{II.81})$$

$$C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \quad S_{33} = \frac{1}{E_3} \quad (\text{II.82})$$

$$\begin{cases} C_{44} = G_{23} & C_{55} = G_{13} & C_{66} = G_{12} \\ S_{44} = 1/G_{23} & S_{55} = 1/G_{13} & S_{66} = 1/G_{12} \end{cases} \quad (\text{II.83})$$

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3} \quad (\text{II.84})$$

$$\frac{\nu_{21}}{\nu_{12}} = \frac{E_2}{E_1} \quad \frac{\nu_{32}}{\nu_{23}} = \frac{E_3}{E_2} \quad \frac{\nu_{31}}{\nu_{13}} = \frac{E_3}{E_1} \quad (\text{II.85})$$

avec:

- E_1 : module de Young longitudinal
- E_2 : module de Young transversal
- E_3 : module de Young normal
- G_{12} : module de cisaillement longitudinal

G_{13}, G_{23} : modules de cisaillement transverse

$\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$: coefficients de Poisson.

Les propriétés du matériau orthotrope sont donc déterminées uniquement par 9 modules de l'ingénieur : $E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{13}, G_{23}, \nu_{12}, \nu_{13}$ et ν_{23} .

II.2.4. Matériau unidirectionnel

La cellule élémentaire d'un matériau composite unidirectionnel peut être considérée comme constituée d'une fibre entourée d'un cylindre de matrice (Fig II.4). Dans ce cas, le matériau se comporte comme un matériau orthotrope possédant, de plus, un axe de révolution. Le matériau est alors appelé matériau orthotrope de révolution ou isotrope transverse.

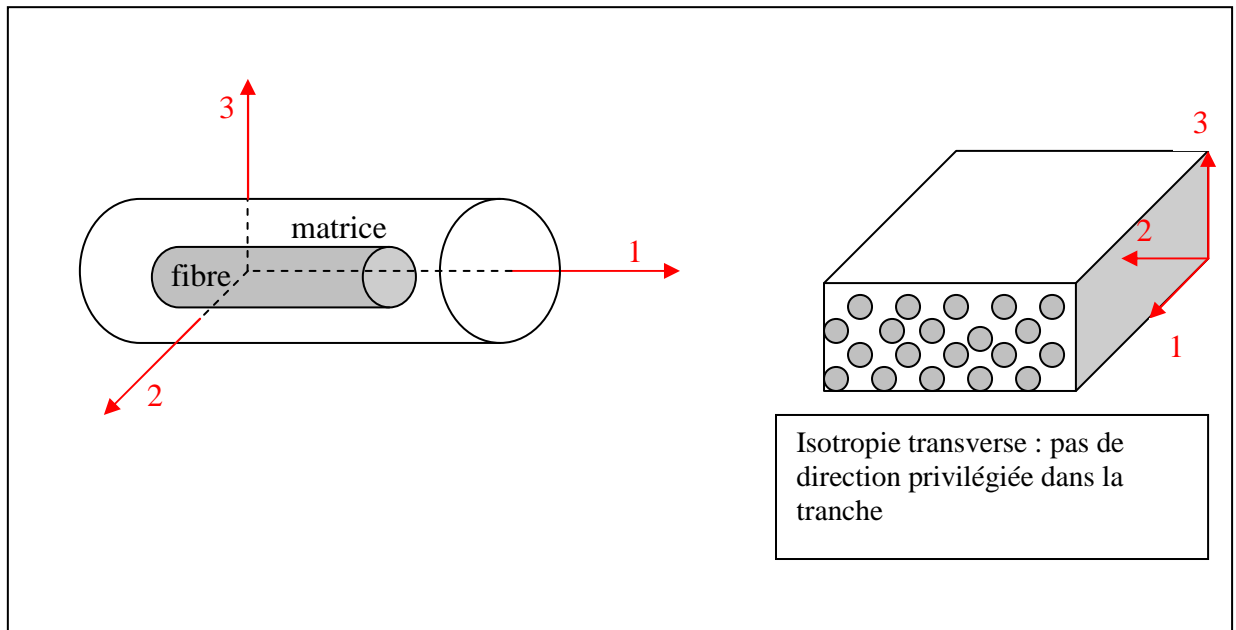


Fig II. 4: Matériau composite unidirectionnel (extrait de [16])

La matrice rigidité s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (\text{II.86})$$

Les propriétés du matériau unidirectionnel sont donc déterminées uniquement par 5 modules.

II.2.5. Caractérisation élastique des composites : cas des stratifiés périodiques orthotropes

L'architecture des matériaux composites permet d'analyser divers stades possibles de caractérisation, stades que l'on peut associer à différentes approches. On peut évoquer tout d'abord l'étude du comportement mécanique de la couche, appelé comportement microscopique. Cette approche, dite « micro-méso », se place au niveau des constituants de la couche, la matrice et le renfort, et pose le problème du passage constituants-couche.

La seconde approche, dite « méso-macro », consiste à décrire le comportement global du stratifié s'attachant dans un premier temps, à établir le comportement de la couche, puis en développant un processus permettant de remonter au stratifié. Enfin, l'approche macroscopique du comportement mécanique considère le stratifié comme une boîte noire.

Nous allons nous intéresser particulièrement à la démarche utilisée dans l'approche d'homogénéisation utilisée dans les cas d'une structure stratifiée périodique orthotrope. Cette approche est souvent liée au passage « méso-macro ». Cette méthode nous intéresse particulièrement car les structures auxquelles nous avons été confrontés dans ce travail, et qui ont fait l'objet d'homogénéisation, notamment le cœur feuilleté du stator, ainsi que la structure des bobinages, s'apparentent à des matériaux stratifiés périodiques orthotropes.

❖ Approche d'homogénéisation pour le cas de matériaux stratifiés périodiques

Pour déterminer les propriétés mécaniques « macro » d'une structure composite, il faut prendre en compte de nombreux aspects physiques et mécaniques qui caractérisent celle-ci. Ceci pose en pratique des problèmes complexes. En effet ; le caractère hétérogène des constituants au sein de la structure à une échelle suffisamment fine, rend la tâche de la modélisation quasi impossible. Pour contourner cette difficulté, de nombreuses études font appel à des hypothèses simplificatrices, avec des modèles géométriques simples et idéalisés, plus ou moins éloignés de la réalité [24, 48, 91, 145]. La complexité de ces méthodes, dites d'homogénéisation, dépend du concept de base considéré et de l'adéquation des hypothèses au problème réel. On peut citer entre autres : la loi des mélanges, les équations de Halpin Tsai, les formules de Greszczuk, Puck, Pabiot...etc. La plupart de ces formulations sont adaptées à des cas particuliers et sont donc d'application limitée.

Les méthodes utilisées peuvent être classées suivant trois types : recherche de bornes ou expressions limites, en utilisant les théorèmes variationnels de l'énergie ; recherche de solutions exactes et approches semi-empiriques [16]. Nous avons adopté la méthode dite des « solutions exactes », abordée avec des schémas simplifiés des strates (géométrie de la cellule, conditions imposées sur les frontières de la cellule...etc.). Cette approche analytique du problème s'avère générale et les expressions résultantes se manipulent facilement. Leur utilisation requiert la connaissance des constantes élastiques du composant fibre et du composant matrice (Modules de Young, et coefficient de Poisson ou coefficients de Lamé).

Un matériau périodique est constitué de la répétition (suivant une direction) de l'alternance de plusieurs strates, ou couches, planes et d'épaisseur constante, chacune d'entre elles étant constituée d'un matériau homogène, éventuellement anisotrope. La figure Fig II.5 en donne un exemple dans le cas où l'on a seulement deux strates par motif répétitif.

La figure Fig II.5 fixe aussi les notations que nous utiliserons dans ce paragraphe. L'origine du repère est liée à la cellule de base choisie à l'interface entre deux strates, et les axes du repère orthonormé

sont tels que le plan (\vec{y}_1, \vec{y}_2) est parallèle aux strates ; la direction \vec{y}_3 est donc orthogonale aux strates.

Dans ce paragraphe, nous présentons les principales étapes d'une étude d'homogénéisation d'un stratifié lorsque toutes les strates ont un comportement élastique linéaire. Dans ce cas, on retrouvera les formules couramment utilisées par les ingénieurs pour les matériaux, pas forcément stratifiés. La méthode se base sur un développement de Taylor qui conduit, à l'ordre 1 à un problème d'homogénéisation périodique.

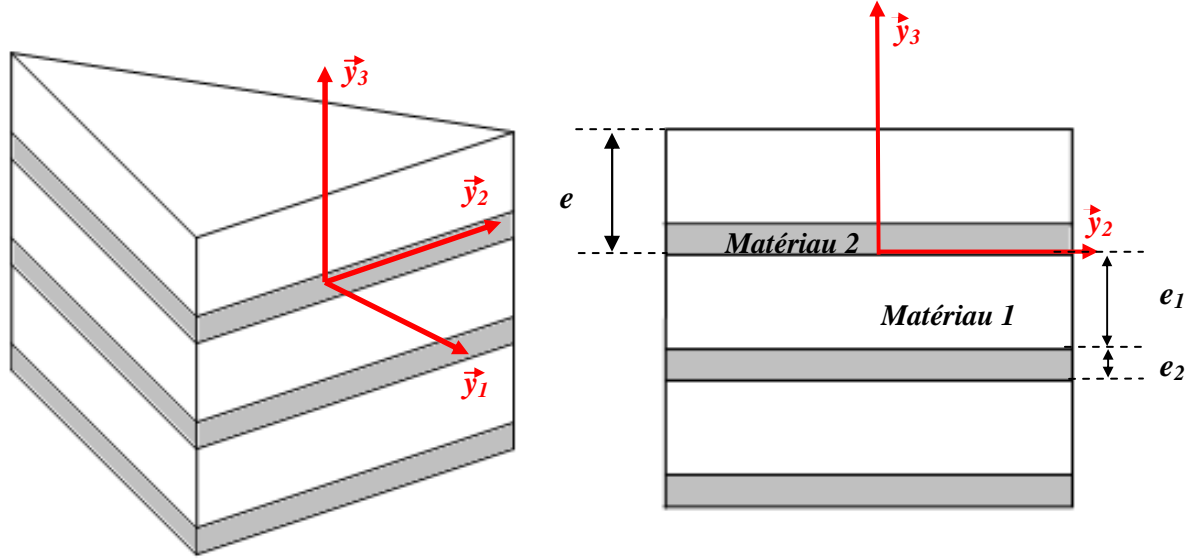


Fig II. 5 : Représentation d'un matériau périodique : notations

On commence par montrer que l'homogénéisation périodique permet de se ramener [18] à une seule variable d'espace, ce qui permet de mener analytiquement les calculs jusqu'à la résolution complète des problèmes dans de nombreux cas concrets. De plus, une décomposition des tenseurs symétriques d'ordre 2 en parties plane et antipiane, est introduite [41].

Dans ce paragraphe, nous présentons le cas de deux couches seulement ; on pourra aisément généraliser les formules au cas de plusieurs couches.

Nous convenons d'adopter les notations suivantes :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{Bmatrix} \quad \text{pour les déformations} \quad \text{et} \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} \quad \text{pour les contraintes.}$$

Les notations en caractères minuscules ε_{ij} et σ_{ij} concernent les grandeurs microscopiques, relatives aux couches. Les grandeurs en caractères macroscopiques, E_{ij} et Σ_{ij} quant à elles correspondent respectivement aux déformées et contraintes macroscopiques, ou homogénéisées, du stratifié.

II.2.5.1.1. Propriétés des structures périodiques

Partant de la périodicité des tenseurs de contraintes $\{\varepsilon\}$ et de déformations $\{\sigma\}$, périodicité qui est quelconque selon les directions parallèles au plan (\vec{y}_1, \vec{y}_2) , on peut montrer [41] que $\{\varepsilon\}$ et $\{\sigma\}$ ne dépendent ni de y_1 , ni de y_2 . On en déduit également que le déplacement sur la structure périodique $\{u^{pér}\}$ ne dépend ni de y_1 , ni de y_2 .

En prenant pour cellule de base le segment $[O, e]$ de l'axe (O, \vec{y}_3) , et on cherche la fonction $\{u^{pér}\}$ comme une fonction définie sur ce segment.

Soit $\{u^{pér}\} : y_3 \in [O, e] \longrightarrow \{u^{pér}(y_3)\} \in \mathbb{R}^3$

On peut écrire la déformation sous la forme suivante :

$$\{\varepsilon(y_3)\} = \{E\} + [b]\{u^{pér}(y_3)\} = \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} + u_{3,3}^{pér} \\ 2E_{12} \\ 2E_{23} + u_{2,3}^{pér} \\ 2E_{13} + u_{1,3}^{pér} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.87})$$

où : $\{E\}$ est le tenseurs des déformations macroscopiques (intégrées sur le volume de la zone traitée).

$$\text{et } [b] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.88})$$

Ceci montre que les composantes ε_{11} , ε_{22} et ε_{12} (et donc ε_{21}) de la déformation sont constantes sur la cellule de base, les autres ne pouvant dépendre que de y_3 .

La loi de comportement, quelle qu'elle soit, entraîne alors que la contrainte $\{\sigma\}$ est une fonction de y_3 seulement. L'équation d'équilibre ${}^t[b]\{\sigma\} = 0$ s'écrit alors :

$$\sigma_{13,3} = 0, \quad \sigma_{23,3} = 0, \quad \sigma_{33,3} = 0 \quad (\text{II.89})$$

ce qui signifie que les composantes σ_{i3} , et σ_{3i} par symétrie, sont constantes et continues à l'interface entre les strates (sinon $\sigma_{i3,3}$ comporterait un Dirac), donc constantes dans toute l'épaisseur de la cellule de base ; les autres composantes peuvent a priori dépendre de y_3 et ne sont pas forcément continues à l'interface entre les strates. On peut donc déduire sur les contraintes macroscopiques, intégrées sur le volume de la zone étudiée, Σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) que :

$$\Sigma_{13} = \sigma_{13} \quad \Sigma_{23} = \sigma_{23} \quad \Sigma_{33} = \sigma_{33} \quad (\text{II.90})$$

Le problème est ainsi ramené à une seule variable spatiale. De plus, certaines composantes des inconnues sont constantes, ce qui simplifie ou réduit le nombre d'inconnues.

D'après la relation (II.83), les trois composantes de la déformation dans le plan des strates (ϵ_{11} , ϵ_{22} et ϵ_{12}) sont constantes et égales aux composantes de même indice de la déformation macroscopique (E_{11} , E_{22} et E_{12}). D'après la relation (II.84), les trois composantes de la contraintes qui ne sont pas dans le plan des strates (σ_{11} , σ_{22} et σ_{12}) sont constantes et égales aux composantes de même indice de la contrainte macroscopique (Σ_{11} , Σ_{22} et Σ_{12}).

Ceci amène à décomposer tout tenseur symétrique du second ordre en parties plane (les trois composantes dans le plan des strates) et antiplane (les trois autres). On pose donc :

$$\{\hat{\epsilon}\} = \begin{Bmatrix} \epsilon^P \\ \epsilon^A \end{Bmatrix} \quad \text{avec : } \{\epsilon^P\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\epsilon^A\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{32} \\ 2\epsilon_{31} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.91})$$

ainsi que :

$$\{\hat{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \sigma^P \\ \sigma^A \end{Bmatrix} \quad \text{avec : } \{\sigma^P\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\sigma^A\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{33} \\ 2\sigma_{32} \\ 2\sigma_{31} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.92})$$

Et on note qu'on a, d'après (II.83) et (II.84) :

$$\{\epsilon^P\} = \{E^P\} \quad \text{et} \quad \{\sigma^A\} = \{\Sigma^A\} \quad (\text{II.93})$$

Nous convenons d'appeler $[A]$ la matrice liant les tenseurs de contrainte et de déformation microscopiques (dans chaque strate) telle que :

$$\{\epsilon\} = [A]\{\sigma\} \quad (\text{II.94})$$

Nous pouvons montrer que pour chaque strate:

$$\{\hat{\epsilon}\} = [\hat{A}]\{\hat{\sigma}\} \quad (\text{II.95})$$

où : $[\hat{A}]$ est obtenue à partir de la matrice $[A]$ par permutation des lignes et colonnes 3 et 4, en tenant compte de (égalité déformations planes, contraintes antiplanes). On peut alors écrire cette relation sous la forme:

$$\begin{Bmatrix} \sigma^P \\ \Sigma^A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}^{PP} & \hat{A}^{PA} \\ \hat{A}^{AP} & \hat{A}^{AA} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E^P \\ \epsilon^A \end{Bmatrix} \quad (\text{II.96})$$

d'où :

$$\begin{Bmatrix} \sigma^P \\ \epsilon^A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{B}^{PP} & \hat{B}^{PA} \\ \hat{B}^{AP} & \hat{B}^{AA} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E^P \\ \Sigma^A \end{Bmatrix} \quad (\text{II.97})$$

avec :

$$\begin{cases} \hat{B}^{PP} = \hat{A}^{PP} - \hat{A}^{PA}(\hat{A}^{AA})^{-1}\hat{A}^{AP} & \hat{B}^{AA} = (\hat{A}^{AA})^{-1} \\ \hat{B}^{PA} = \hat{A}^{PA}(\hat{A}^{AA})^{-1} & \hat{B}^{AP} = -(\hat{A}^{AA})^{-1}\hat{A}^{AP} \end{cases} \quad (\text{II.98})$$

La condition nécessaire pour aboutir à ce résultat est que la matrice \hat{A}^{AA} soit inversible.

Nous allons utiliser ces résultats pour le cas de l'élasticité linéaire afin d'exprimer la matrice d'élasticité $[C]$ contenant les propriétés macroscopiques, ou homogénéisées, du stratifié en fonction des propriétés de chaque strate. Rappelons que la matrice d'élasticité est définie de la manière suivante :

$$\{\Sigma\} = [C]\{E\} \quad (\text{II.99})$$

II.2.5.1.2. Caractéristiques mécaniques dans le cas général d'un stratifié périodique

Nous allons dans ce paragraphe indiquer les étapes qui permettent de déterminer la matrice d'élasticité linéaire homogénéisée du stratifié, qui est symétrique et définie positive.

Considérons un stratifié constitué de N couches, le comportement de chaque couche (d'épaisseur e_i) étant défini par la matrice d'élasticité $[C_i]$ avec $i=1, \dots, N$. En reprenant l'équation (établi précédemment B), nous avons :

$$\begin{Bmatrix} \sigma^{iP} \\ \epsilon^{iA} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{B}^{iPP} & \hat{B}^{iPA} \\ \hat{B}^{iAP} & \hat{B}^{iAA} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E^{iP} \\ \Sigma^{iA} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.100})$$

On en déduit, en prenant les valeurs moyennes,

$$\begin{Bmatrix} \Sigma^P \\ E^A \end{Bmatrix} = [\hat{B}] \begin{Bmatrix} E^P \\ \Sigma^A \end{Bmatrix} \quad \text{avec : } [\hat{B}] = \frac{1}{e} \sum_{i=1}^N e_i [\hat{B}^i] \quad (\text{II.101})$$

et finalement:

$$\begin{Bmatrix} \Sigma^P \\ \Sigma^A \end{Bmatrix} = [\hat{C}] \begin{Bmatrix} E^P \\ E^A \end{Bmatrix} \quad \text{avec : } [\hat{C}] = \begin{bmatrix} \hat{C}^{PP} & \hat{C}^{PA} \\ \hat{C}^{AP} & \hat{C}^{AA} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E^P \\ \Sigma^A \end{Bmatrix} \quad (\text{II.102})$$

$$\begin{cases} \hat{C}^{PP} = \hat{B}^{PP} - \hat{B}^{PA}(\hat{B}^{AA})^{-1}\hat{B}^{AP} & \hat{C}^{AA} = (\hat{B}^{AA})^{-1} \\ \hat{C}^{PA} = \hat{B}^{PA}(\hat{B}^{AA})^{-1} & \hat{C}^{AP} = -(\hat{B}^{AA})^{-1}\hat{B}^{AP} \end{cases} \quad (\text{II.103})$$

La matrice d'élasticité $[C]$ homogénéisée s'obtient en permutant les ligne et colonne 3 et 4 de la matrice $[\hat{C}]$.

II.2.5.1.3. Application dans le cas de deux strates isotropes

Nous traitons ici le cas d'un stratifié à deux couches ($N = 2$) isotropes. Afin de simplifier les expressions, nous introduisons les coefficients de Lamé. Nous notons ainsi : λ_i et μ_i les coefficients correspondant à la couche i . Nous convenons également, afin de simplifier les expressions:

$$\gamma = \lambda_i + 2\mu_i$$

La matrice d'élasticité du matériau de la couche i s'écrit donc :

$$[C^i] = \begin{bmatrix} \gamma^i & \lambda^i & \lambda^i & & & \\ \lambda^i & \gamma^i & \lambda^i & & & \\ \lambda^i & \lambda^i & \gamma^i & & & \\ & & & \mu^i & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & \mu^i & 0 \\ & & & 0 & 0 & \mu^i \end{bmatrix} \quad (\text{II.104})$$

On trouve alors que les expressions des seuls termes non nuls de la matrice d'élasticité homogénéisée $[C]$ sont :

$$C_{11} = C_{22} = \frac{e_1\gamma^1 + e_2\gamma^2}{e} - \frac{e_1e_2(\lambda^1 - \lambda^2)^2}{e(e_2\gamma^1 + e_1\gamma^2)} \quad (\text{II.105})$$

$$C_{12} = \frac{e_1\lambda^1 + e_2\lambda^2}{e} - \frac{e_1e_2(\lambda^1 - \lambda^2)^2}{e(e_2\gamma^1 + e_1\gamma^2)} \quad (\text{II.106})$$

$$C_{13} = C_{23} = \frac{e_1\lambda^2\gamma^1 + e_2\lambda^1\gamma^2}{e_2\gamma^1 + e_1\gamma^2} \quad (\text{II.107})$$

$$C_{33} = \frac{e}{\frac{e_1}{\gamma^1} + \frac{e_2}{\gamma^2}} \quad \text{et} \quad C_{55} = C_{66} = \frac{e}{\frac{e_1}{\mu^1} + \frac{e_2}{\mu^2}} \quad (\text{II.108})$$

$$C_{44} = \frac{e_1\mu^1 + e_2\mu^2}{e} \quad (\text{II.109})$$

On note que (II.109) est une loi des mélanges sur μ , que les expressions (II.108) sont les inverses de lois des mélanges respectivement sur $\frac{1}{\gamma}$ et $\frac{1}{\mu}$. Le premier terme du second membre de (II.105) est une loi des mélanges sur γ et le premier terme du second membre de (II.106) est une loi des mélanges sur λ . Par contre, nous ne pouvons pas dire que globalement $[C]$ soit une loi des mélanges.

Chapitre III

Etude d'un stator de moteur ferroviaire

En fonctionnement, les moteurs embarqués de trains subissent de nombreuses contraintes liées aux sollicitations en service telles que la qualité de la voie, les vibrations, les secousses engendrant des chocs...etc.

Les tenues en fatigue et aux chocs représentent les facteurs les plus déterminants dans la durée de vie d'une machine de traction ferroviaire. Des normes internationales [26] définissent les essais et les critères d'acceptation à la résistance aux sollicitations et permettent d'estimer [96,97] les durées de vie des moteurs. Celles-ci doivent dépasser les 30 ans théoriques afin d'être considérées comme infinies et donc acceptables.

Globalement, la démarche de validation aux chocs et aux vibrations via des essais est très lourde si l'on suivait le protocole opératoire défini par les normes. En effet, ceux-ci requièrent souvent des outils expérimentaux considérables tels que des tables vibrantes permettant de dépasser 70 kN en fatigue vibratoire ainsi que des équipements de tests lourds adaptés aux chocs de structures massives. Face à la lourdeur de tels protocoles difficile à respecter ou encore à systématiser pour chaque type de moteur conçu, l'option de construire un modèle fiable, capable de représenter les comportements dynamiques des organes des machines de traction paraît incontournable. Ceci constitue le principal objectif des travaux de cette étude.

Dans ce sens, la maîtrise du calcul prévisionnel du comportement dynamique des machines de traction est un enjeu majeur pour le constructeur tant sur le plan de la compréhension de certains phénomènes physiques, que sur le plan de l'amélioration de la conception en présence de facteurs mal maîtrisés. Parmi ces facteurs, nous pouvons citer la nature des matériaux constituant les carcasses des moteurs (métaux ferreux et cuivreux, polymères), le comportement de l'assemblage du cœur ferromagnétique feuilleté, le comportement de l'assemblage des bobines, les non-linéarités de contact aux différentes jonctions entre sous-structures ainsi que les nombreuses sources d'incertitudes inhérentes au processus de fabrication. Tous ces aspects sont des problèmes déterminants identifiés par le retour d'expérience et dont la résolution assure la maîtrise de la modélisation et de la simulation du comportement des moteurs de traction. Or, le retour d'expérience ainsi que les travaux scientifiques menés dans ce domaine portent un intérêt particulier à l'organe qui concentre le plus de difficultés à savoir le stator. En effet ; ce dernier, et compte tenu de son cœur ferromagnétique feuilleté, de ses bobinages complexes, de sa masse dans le moteur et d'une manière générale de son encombrement, représente la majeure partie des méconnaissances.

Un des objectifs de ce travail est de valider le modèle de la structure d'un stator de machine électrique en effectuant des corrélations calculs-essais. Cette validation devra permettre de caractériser les propriétés mécaniques et le comportement d'un tel assemblage hétérogène à structure compacte et dont le cœur ferromagnétique feuilleté et les bobinages tressés sont les principaux constituants.

L'effort principal porte sur la mise en œuvre d'un modèle numérique représentatif du comportement en service (ou cas de charges connus) d'un stator électrique et vise à proposer in fine une méthodologie de calcul de ces structures (règles de modélisation, propriétés des tôles et des bobines ainsi que leurs effets, ...). A terme, ces modèles fiables devront permettre l'optimisation du design des stators en relation avec leur conception. Ceci devra être appuyé par une meilleure connaissance, acquise par ailleurs, des sollicitations en service dont les moteurs font l'objet.

Ces travaux constituent le principal objectif du projet SEME (Simulations et Essais des Machines Embarquées) qui s'appuie sur la collaboration entre ALSTOM-Transport et le LMARC. (Plateforme de recherche AMIMAC 2007/2010).

III.1. Présentation de la structure physique

Dans ce paragraphe nous présentons à travers une architecture typique, les différents composants d'un stator et leur agencement.

Un stator de machine de traction ferroviaire peut être décomposé globalement en 3 principaux organes :

- a) **Le cœur ferromagnétique feuilleté** : Il s'agit d'un empilement de tôles d'acier au silicium. Ces tôles, très fines (de 0.3 à 0.6 mm d'épaisseur selon l'application) subissent individuellement un traitement thermique et le dépôt fin d'une couche isolante. Elles sont découpées de telle sorte que leur géométrie extérieure, globalement cylindrique ou polyédrique, donne sa forme finale du stator. La géométrie intérieure des feuilles est dentelée et contient un nombre important (de 36 à 72 voire plus) d'encoches prévues pour intégrer les bobinages.
- Ces feuilles sont empilées manuellement (Fig III.1) par centaines (500 à 900 feuilles) et forment le cœur ferromagnétique du stator ou « le fer ». Cette conception permet le passage du courant électrique dans chacune des feuilles, via les bobines, sans que celles-ci ne se transmettent une énergie électrique entre elles.
- L'empilement est compacté par une pression de part et d'autre du paquet de tôles de l'ordre de 20 à 30 kg/m². Cette pression est assurée par un outillage spécifique afin de garantir une hauteur de fer définie par le cahier des charges.

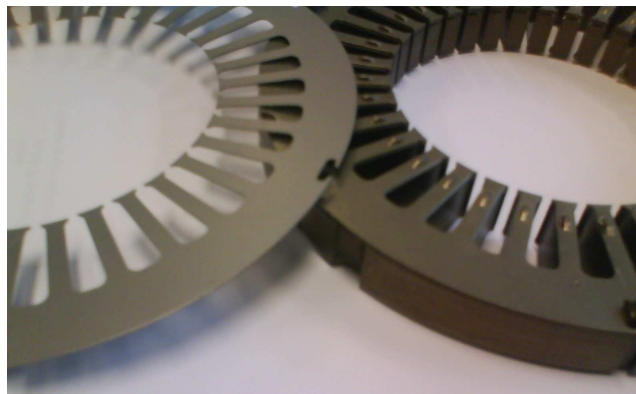


Fig III. 1: Assemblage feuilleté à partir d'une tôle unitaire (maquette de 30 feuilles)

- b) **La carcasse de maintien extérieur** (Fig III.2): Deux plateaux en acier, dits « de serrage », viennent maintenir sur ses extrémités, l'empilement de tôles. Ces plateaux sont reliés par des entretoises, en acier également, afin d'assurer la cohésion longitudinale et radiale des feuilles. L'ensemble de ces pièces de maintien est appelé « éléments de carcasse ». Des soudures assurent la liaison rigide d'une part entre les éléments de carcasse et d'autre part entre le cœur feuilleté et les entretoises. La pression de maintien initiale, assurée par l'outillage, est ensuite relâchée et les soudures peuvent subir à ce titre des contraintes dues à la détente de l'empilement. Un traitement thermique dit de « *détensionnement* » et un grenaillage assurent la diminution des contraintes de soudures.

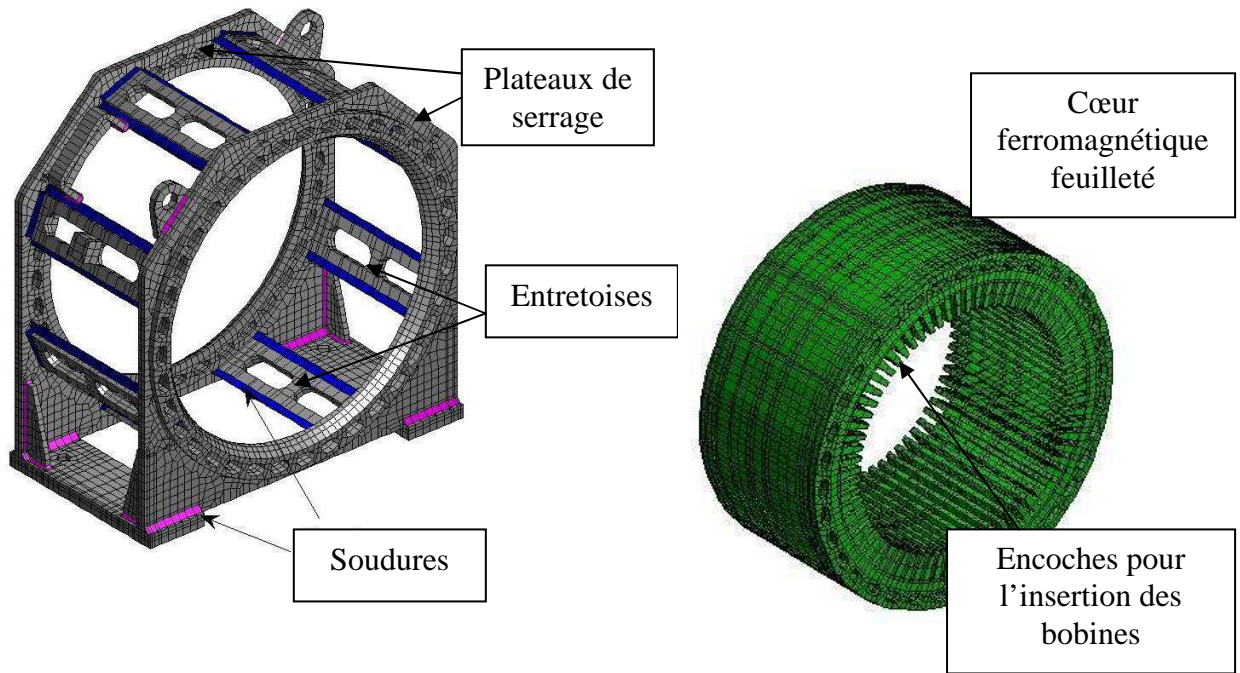


Fig III. 2: intégration de l'empilement de tôles et maintien par la carcasse extérieure

- c) **Les bobinages** : Il s'agit de spires cuivreuses pré-déformées (Fig III.3-a) et dont la partie droite est insérée dans les encoches du cœur feuilleté. Ces bobines insérées sont maintenues latéralement par un montage serré et radialement par des « cales d'encoches ».

L'intégration des bobinages constitue une étape délicate dans le processus de fabrication en raison de sa complexité et de son caractère essentiellement manuel. Par ailleurs, les bobinages peuvent être considérés avant tout comme des assemblages en soi. En effet, il s'agit de plusieurs feuilles de cuivres (une dizaine) dont chacune est entourée d'une fine couche isolante. L'ensemble est enroulé et maintenu par un deuxième isolant épais (entre 1 et 2 mm) (Fig III.3-b). Chaque bobine est ensuite déformée suivant un schéma spécifique de telle sorte que l'on obtienne deux tronçons droits, qui seront insérés dans les encoches du cœur ferromagnétique, et deux extrémités dépassant les bords de la carcasse de part et d'autre, appelées aussi « têtes de bobines ». Autant de bobines que d'encoches sont nécessaires à l'équipement d'un stator. Les têtes de bobines sont manuellement tressées de telle sorte qu'elles forment deux ensembles, (Fig III.4), quasi indépendants du corps du stator. Sur l'une des deux extrémités viennent se greffer des cercles en cuivre dont l'ensemble formera les « cercles de phases ».

Une fois les bobinages montés, le stator ainsi bâti subit un traitement d'imprégnation par une vapeur de résine de polymère, résine qui imbibera les isolants et les couches de la bobine et qui remplira par ailleurs les interstices pouvant exister entre les feuilles du cœur ferromagnétique.

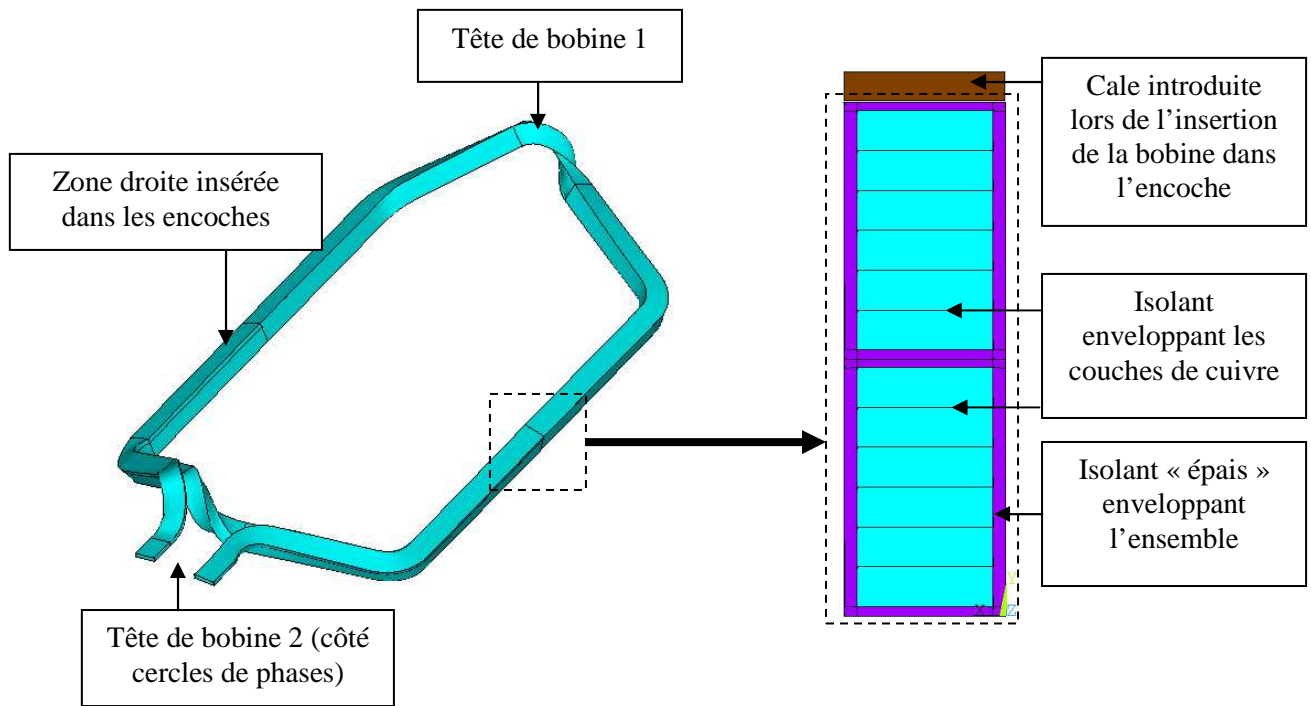


Fig III. 3: a- forme globale d'une bobine avant insertion –b - Section droite d'une bobine insérée

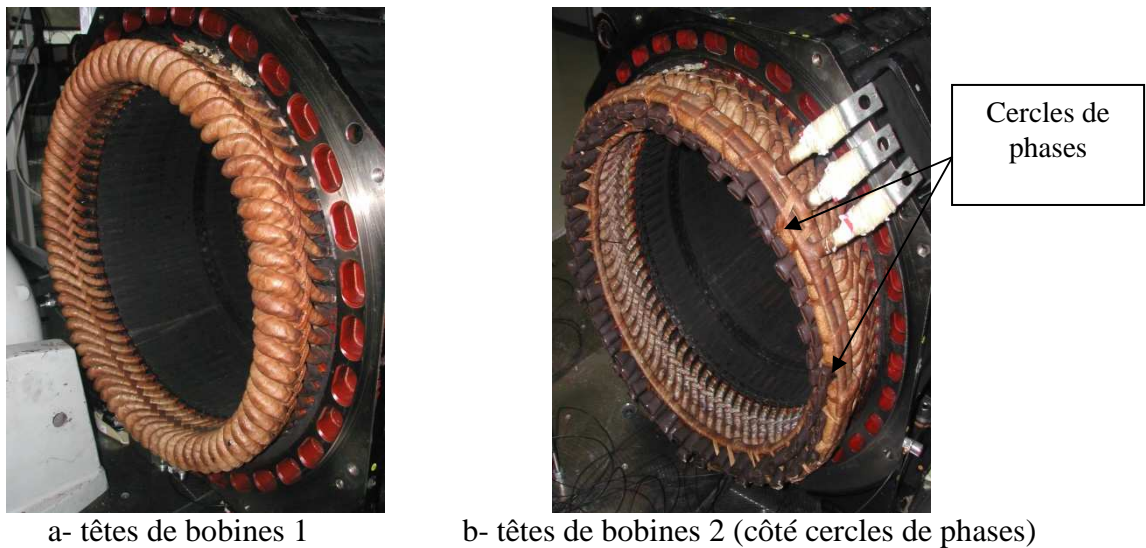


Fig III. 4: Têtes de bobines et cercles de phase

Il faut souligner à la fois la complexité de l'assemblage, son hétérogénéité (feuilleté, bobines en cuivre et isolant imbibé de résine...), la multitude des types de liaisons de maintien (bobinages montés serrés dans les encoches, feuille empilées et compactées, carcasse soudée ou en contact direct avec les feuilles...) et la multiplication des interventions manuelles lors du processus de fabrication.

Ainsi, une étude très fine de chaque composant, de chaque liaison ou de chaque processus d'assemblage n'est pas envisagée dans ce travail. Notre approche consiste à étudier la dynamique de la structure dans son ensemble en proposant des solutions de modélisation pour chaque organe et chaque liaison et en validant ensuite ces choix par des essais dynamiques. Ce processus permettra de

construire une modélisation type qui devra garantir une qualité de prédiction raisonnable des modes propres globaux de la structure. Des règles de modélisation génériques seront finalement établies.

III.2. Etat de l'art sur l'étude et la modélisation des stators de moteurs de traction ferroviaire

De l'approche analytique pour la prédiction des fréquences propres ...

Les premiers efforts entrepris traitant de la modélisation et de l'analyse vibratoire des structures des moteurs électriques remontent au début du 20^e siècle. Toutes ces études ont été essentiellement motivées par des applications acoustiques. Den Hartog [34] a commencé par étudier une méthode pour estimer les fréquences propres d'un stator de type annulaire. Plus tard, Jordan et al. [68] ont introduit, dans leur méthode analytique de calcul des fréquences propres, les effets de cisaillement et de l'inertie de rotation. Les résultats montrés étaient acceptables pour de petites machines de faible et moyenne puissance. Pavlovsky *et al* [102] se sont intéressés à une étude plus fine du stator et ont considéré ce dernier, de géométrie annulaire, comme une plaque épaisse chargée de ses dentures. Les encoches internes du stator et de ses bobinages ont été représentées par des masses additionnelles réparties. Verma et Girgis [137] ont quant à eux investigué, analytiquement, les effets de la hauteur ainsi que de la géométrie des encoches internes sur le comportement dynamique des stators.

Comme beaucoup de stators sont en réalité des assemblages d'un cœur ferromagnétique et d'une carcasse intérieure, Erdelyi [43], s'intéressant à la carcasse, a introduit dans son modèle analytique deux plaques épaisses concentriques reliées par des poutres afin de modéliser la liaison entre ces deux composants. Le modèle était prédictif uniquement pour des géométries annulaires fines pour lesquelles le rapport entre les rayons interne et externe ne dépassait pas 0.2. Afin d'améliorer ce modèle, Ellison et Yang [40] ont proposé un modèle plus élaboré en amplifiant l'effet de la carcasse extérieure par l'augmentation de son épaisseur dans le modèle sans réellement apporter une nette amélioration par rapport aux résultats expérimentaux. D'une manière générale, certaines études [11, 136, 138] ont pris en compte plus ou moins rigoureusement la présence de la carcasse, tandis que d'autres [34, 154] ont considéré que sa contribution était négligeable.

Ceci était essentiellement dû au fait que la géométrie des stators était largement simplifiée. En effet, il a été prouvé, expérimentalement [133] que les détails structurels tels que les positions des supports et la géométrie des trous de ventilation qui étaient jusque là, systématiquement négligées dans les modèles précédents, avaient une forte influence sur la qualité de prédiction des fréquences propres. Ceci est sans compter le développement d'architectures de plus en plus complexes, ce qui a rendu obsolètes les modélisations analytiques antérieures.

D'autres études, analytico-expérimentales, plus élaborées, ont été menées sur le comportement vibratoires des stators. Dans [139], un modèle de cylindre épais a été développé utilisant la théorie de l'élasticité 3D afin de modéliser le stator. Une approche énergétique combinée avec les principes de Rayleigh-Ritz a été utilisée afin de construire et de dériver l'équation générale en fréquences du modèle. L'étude a incorporé les effets des dentures (ou encoches) internes du stator, ainsi que ceux de la carcasse et des bobinages, représentées par leur masse. Cependant, cette étude analytique, menée en parallèle avec une étude expérimentale [125, 147] était limitée aux modèles de faibles hauteurs, autrement dit à des architectures annulaires ou quasi annulaires du stator.

De l'introduction de la méthode des éléments finis dans la modélisation des stators...

Dans les années 1970, Shumilov [124] et Yang [149] ont introduit la méthode des éléments finis pour l'étude vibratoire des stators de moteurs électriques et ont montré qu'elle était nettement plus précise que les méthodes analytiques. L'avantage de cette méthode est qu'elle peut prendre en compte les détails géométriques de la structure des stators et permet d'étudier l'influence des différentes

composantes séparément. Cependant, comme indiqué par Wang et Williams [142], les modélisations proposées, souvent basées sur un maillage grossier, n'ont jamais permis de maîtriser entièrement le comportement du stator de manière précise.

De l'intérêt de l'étude du cœur ferromagnétique feuilleté du stator...

Compte tenu du caractère particulier feuilleté du cœur ferromagnétique, certaines études ont commencé à se focaliser sur cet aspect. En effet, selon [142], l'analyse vibratoire d'un stator n'est pas un problème délicat, uniquement parce qu'il s'agit d'un assemblage de plusieurs composants, mais surtout en raison de la structure feuilletée de son cœur ferromagnétique qu'il n'est pas évident d'appréhender. Rappelons que le choix technologique d'une structure feuilletée trouve son intérêt dans des considérations électrotechniques. En effet, cette solution a toujours été adoptée afin de développer un champ magnétique considérable à l'intérieur du moteur électrique, mettant par conséquent en jeu une énergie électrique et donc thermique, très importantes, sans pour autant détériorer la structure physique. Un cylindre ferromagnétique « plein équivalent » risquerait de fondre ou du moins subir des détériorations cycliques une fois traversé par une forte énergie électrique. Une structure équivalente, en dimensions, composée de centaines de feuilles empilées, isolées les unes par rapport aux autres par un revêtement très fin, garantit la production du champ magnétique souhaité tout en limitant l'élévation de la température.

Cependant, cette structure feuilletée pose des problèmes de modélisation. Les vibrations mécaniques peuvent être considérées comme un balancement ou une fluctuation entre l'énergie potentielle et l'énergie élastique dans la structure en question. La continuité de l'élasticité dans une structure est une condition nécessaire pour garantir cette fluctuation énergétique et sa conservation. Or à l'intérieur du cœur d'un stator, cette continuité élastique n'est justement pas assurée en raison de la présence de feuilles, empilées et compactes certes, mais finalement séparées. Pour cette raison, il a toujours été délicat d'aborder de façon isolée, le feuilleté comme un organe seul séparé de sa carcasse.

Cette structure feuilletée n'a jamais pu être modélisée par un cylindre équivalent homogène en acier. Des exemples typiques peuvent être retrouvés dans [125, 139, 147]. Les modèles proposés ont été incapables de prédire les fréquences de la structure feuilletée et les erreurs relatives ont atteint 30%. Afin d'investiguer dans cette voie, Wang et Williams [142] ont mené une étude combinant des approches numériques et expérimentales sur des maquettes composées de quelques plaques empilées, isolées d'une quelconque carcasse de maintien extérieur. L'étude du comportement de ces maquettes, de différentes épaisseurs et composées d'un nombre croissant de feuilles, avait pour but de comprendre l'effet de l'empilement sur les différents types de modes propres.

Nous notons ici que nombre d'études traitant des stators dits « épais » ont choisi une classification des modes propres en fonction de leur déformées. Nous pouvons en citer deux types :

- Classification en déformées symétriques et antisymétriques, introduite dans [139], pour laquelle la différence entre deux déformées d'un cylindre se juge par rapport au nombre m de cercles modaux de celles-ci. (Fig. III.5). Le mode est dit symétrique ou non si m est respectivement pair ou impair.
- Classification en déformées radiales pures et non-radiales, présentée dans [142] (Fig. III.6), pour laquelle une déformée est dite « radiale pure » si elle ne fait pas intervenir le cisaillement transverse, et donc le jeu axial entre les feuilles dans le cas d'un feuilleté. Elle est dite « non-radiale » dans le cas contraire.

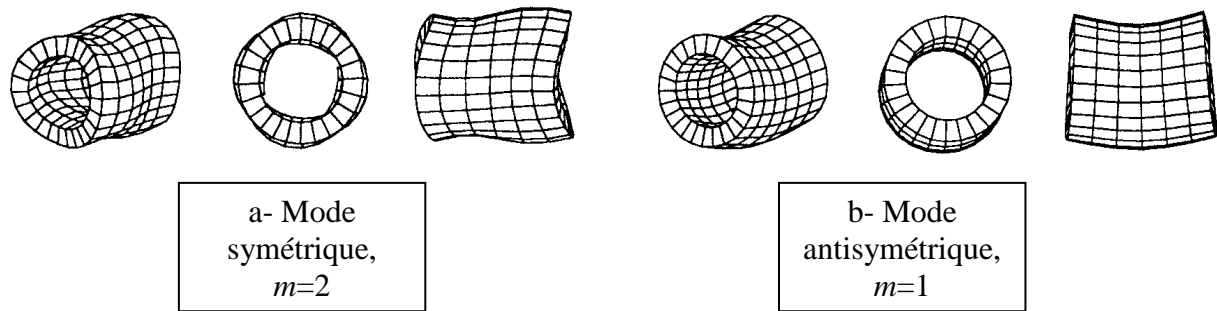


Fig III. 5: classification en modes symétriques et antisymétriques

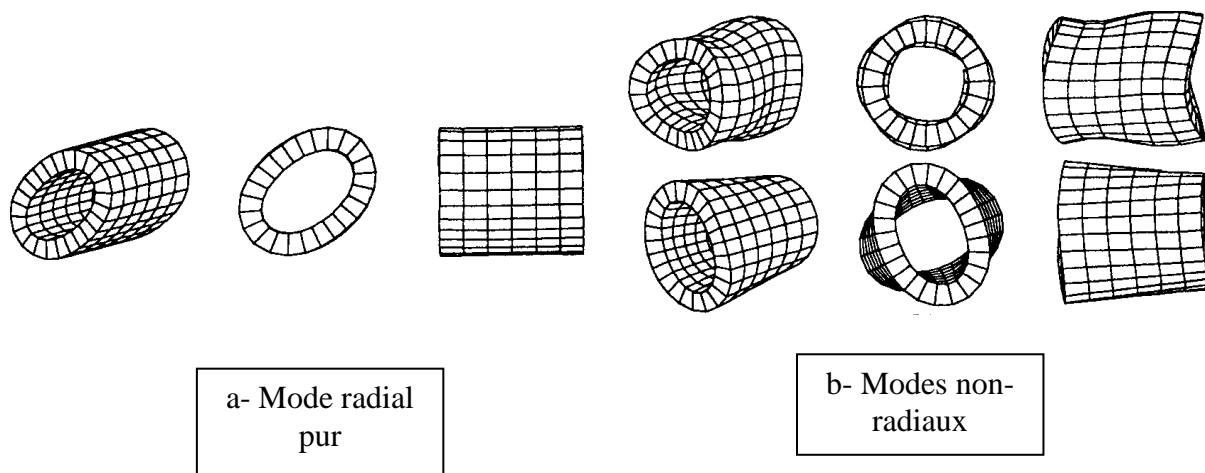


Fig III. 6: illustration de la classification en modes à déformées radiales pures ou non

Cette deuxième façon de classer les modes, plus pertinente a été utilisée dans les travaux de [142]. Ceux-ci ont montré que plus le nombre de feuilles dans un empilement était important, plus l'amplitude de ses modes « non-radiaux » était atténuée ou amortie. Au final, le comportement dynamique des maquettes feuilletées a été dominé par les modes radiaux purs. Or ce qui est intéressant avec cette catégorie de modes, c'est que ses paramètres modaux sont totalement indépendants de la hauteur de l'empilement et peuvent être déterminés uniquement sur la base d'une seule feuille de même dimensions radiales que l'empilement feuilleté épais. Ce raisonnement a par conséquent mené à réduire le problème du calcul des fréquences propres d'un cylindre feuilleté épais à celui d'une seule feuille 2D.

Cela dit, bien que cette étude ait révélé le caractère amortissant d'un empilement, notamment dans sa direction transverse, elle ne peut être généralisée aux cas de stators où la carcasse extérieure a une masse importante et une géométrie soudée. En effet, Wang [141], par exemple, focalise sur les modes radiaux purs et trouve des résultats cohérents par rapport aux résultats expérimentaux car la carcasse a eu un faible effet, d'une part en raison de sa géométrie, fine, cylindrique et montée en enveloppe sur le cœur feuilleté (Fig III.7), et d'autre part à cause de sa faible masse (7% de la masse totale). Dans d'autres architectures, aussi répandues notamment pour les moteurs de traction à forte puissance, telles que celles présentées dans ce travail, la masse de la carcasse peut atteindre 15% à 17% de la masse totale du stator. Sa géométrie n'est pas composée d'un seul bloc cylindrique enveloppant le cœur feuilleté mais de plusieurs éléments (plateaux de serrages et entretoises) soudés. Ainsi les premiers modes globaux des structures étudiées dans ce travail sont justement des modes « non-radiaux », modes que ne peut prédire une approche 2D mais seulement une modélisation 3D.

Notons de plus que les architectures des carcasses des stators, peuvent être plus ou moins complexes avec la présence de supports de levage ou de pieds de suspension sur certaines zones de la hauteur du stator plutôt que d'autres. Tout ceci nous oriente vers le choix d'une modélisation en 3 dimensions.

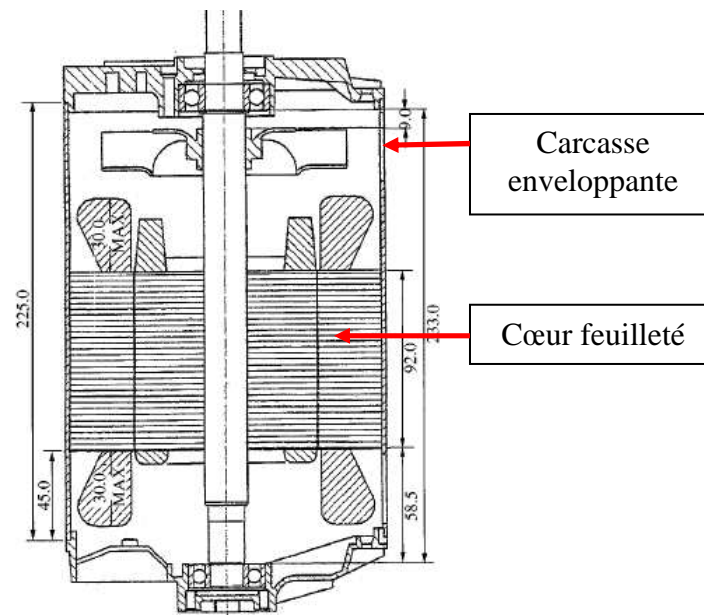


Fig III. 7: Illustration de d'une géométrie de carcasse montée frettée, enveloppant le cœur feuilleté

L'approche que nous avons introduite dans ce travail se base donc sur une modélisation 3D du stator dans son ensemble et notamment pour son cœur ferromagnétique feuilleté.

Tenant compte des travaux antérieurs sur l'impossibilité de remplacer le feuilleté par un volume homogène isotrope, due essentiellement aux différences de comportement dans les directions transversale et radiale de l'empilement, nous avons choisi de considérer le feuilleté comme un ensemble cohérent et orthotrope comme première estimation. Garvey [47], avec ses travaux de caractérisation des propriétés mécaniques des feuilletés, va dans ce sens. Il arrive à établir expérimentalement, par une suite de chargements statiques sur des empilements de hauteurs croissantes, que le module de Young transversal aux plans des feuilles, diffère largement du module de Young radial, qui n'est autre que celui d'une feuille unitaire. Il arrive à montrer également que ce module de Young transversal atteint une asymptote en fonction du nombre de feuilles de l'empilement.

Nous pouvons citer également, le travail de [36] sur l'effet de la pression de maintien sur les extrémités de l'empilement, et qui révèle une évolution du module de Young transverse de l'empilement feuilleté tendant à augmenter sa rigidité. Mais il reste difficile en réalité de tirer des conclusions précises sur les propriétés mécaniques transversales d'un empilement feuilleté en fonction de la pression d'entôlage qu'il subit. En effet, l'entôlage initial n'est que la première étape de l'assemblage du cœur feuilleté. Après intégration de celui-ci dans sa carcasse, et après soudures et procédés de détente thermique, cette pression se relâche et la valeur de la force de cohésion des feuilles n'est plus maîtrisée avec précision. Elle ne peut donc être utilisée comme paramètre fiable. Néanmoins, nous considérons que le cœur feuilleté est assez compact pour être modélisé par un volume homogène équivalent et orthotrope.

De l'étude des effets des composants d'un stator sur son comportement dynamique d'ensemble...

Il est vrai que la particularité des stators de moteurs électriques réside dans leur cœur feuilleté. Cependant, le stator vu dans son ensemble, présente des difficultés supplémentaires. En effet, en plus de l'effet de la carcasse moteur qui a été discuté dans les travaux cités précédemment, vient s'ajouter l'effet des bobinages et de l'imprégnation par une résine de polymère.

Le principal travail de référence mené dans ce sens a été réalisé par Watanabe *et al.* [144]. Il aborde expérimentalement les effets des dentures internes du stator, des bobinages et de leur processus d'assemblage, de l'imprégnation par de la vapeur de résine de polymère ainsi que de la température sur le comportement dynamique du stator. Les principales conclusions montrent que les dentures internes du stator ne peuvent être considérées comme de simples masses distribuées uniformément. Il indique également que les bobinages introduisent un effet de masse en diminuant les fréquences propres du stator. L'imprégnation quant à elle introduit un amortissement et donc une réduction des niveaux des réponses dynamiques. L'élévation de la température, simulant les conditions de fonctionnement du moteur, affecte également son comportement dynamique en diminuant ses fréquences propres de 0 à 8% environ.

En raison de ce nombre important de paramètres influents, et dans l'objectif de l'établissement de règles de modélisation génériques et applicables en bureau d'études, et non d'une modélisation valable pour un seul type d'architectures, notre démarche consiste à construire une modélisation à la fois fiable, réalisable avec des coûts raisonnables tout en étant conscient des différentes tendances dégagées dans les travaux antérieurs. Ces règles de modélisation devront être reproductibles et capables avant tout de prédire avec une précision raisonnable le comportement dynamique d'un stator quelconque de moteur ferroviaire, en particulier ses premiers modes globaux.

III.3. Etude d'une architecture de type 1

Dans ce paragraphe, nous traitons, à travers des études expérimentale et numérique, le cas d'un stator d'architecture typique d'un stator de moteur de traction ferroviaire. La démarche suivie consiste à aborder le problème des stators en deux étapes :

- L'étude du stator nu, autrement dit sans ses bobinages : il s'agit de cibler l'étude sur le cœur feuilleté maintenu par sa carcasse soudée. Une analyse modale expérimentale et une corrélation calcul-essai sont donc réalisées sur le stator nu d'architecture 1.
- L'étude du stator équipé, autrement dit bobiné : il s'agit d'étudier l'effet des bobinages sur le comportement dynamique du stator. Une analyse modale expérimentale et un recalage de modèle sont réalisés sur le stator bobiné de type 1.

Un essai supplémentaire est également mené sur un empilement feuilleté et a pour but sa caractérisation mécanique par une technique ultrasons.

III.3.1. Campagne d'essais

III.3.1.1. Caractérisation du comportement du stator nu

III.3.1.1.1. Analyse modale expérimentale

Il s'agit de réaliser une analyse modale expérimentale sur le stator nu. Ceci passe par :

- La définition de la (les) configuration(s) d'essais à réaliser ;
- La définition de la procédure de mesure ;
- L'extraction des paramètres modaux à savoir les fréquences et les vecteurs propres.

L'étape préliminaire à la préparation de l'analyse modale, notamment la définition des positions des capteurs et leurs repères locaux, doit se baser sur un modèle éléments finis initial établi au préalable. Ainsi, des modèles grossiers du stator nu et bobiné ont été construits. Même si leur initialisation (représentativité de la géométrie et coefficient matériaux) feront l'objet d'une étude plus détaillée dans le paragraphe 3.3, le but de ces modèles est notamment d'aiguiller l'expérimentation sur le type de déformées globales rencontrées dans la bande fréquentielle d'analyse [0,1000 Hz]. Ces modèles servent ainsi de base de travail pour le logiciel d'optimisation AESOP, développé au LMARC, afin d'assister l'expérimentateur à localiser de manière automatique les coordonnées des points à instrumenter.

a) Conditions d'essais

■ Conditions environnementales

La qualité du déroulement de l'essai passe par la maîtrise, autant que possible des paramètres environnementaux. Ainsi nous nous assurons qu'aucun bruit perturbateur n'est dans la salle de mesures notamment lors de l'acquisition des fonctions de transfert. La température varie quant à elle entre 19°C et 21°C.

Compte tenu de la structure « compacte » du stator et afin de se placer dans une bonne configuration d'excitation, nous avons fait le choix d'introduire la force d'excitation sur au moins deux points de la carcasse. Les excitations sont réalisées de manière successive.

■ Etat de la structure

Le stator est monté en libre - libre et suspendu en trois points (Fig III.11). Compte tenu de la géométrie de la structure, nous avons choisi de l'instrumenter via 65 points répartis sur sa peau extérieure. Chaque point de mesure est instrumenté par un capteur triaxial mesurant les accélérations dans les 3 directions ; il en résulte un total de 195 directions. Le stator est équipé par ailleurs de deux têtes d'impédance (cellule de force + accéléromètre).

■ Repères global et local

Le repère global des mesures est le même que celui qui sera défini dans le modèle éléments finis. Il est tel que : l'axe x_0 horizontal est dans l'axe du rotor, l'axe y_0 horizontal est perpendiculaire à x_0 et l'axe z_0 est vertical, orthogonal aux deux précédents.

Les mesures sont réalisées dans un repère local (x_1 , y_1 , z_1) décrit dans la figure Fig III.8. L'axe sensible de l'accéléromètre, x_1 , est confondu avec la normale de la surface au point capteur.

La normale x_1 est définie à partir du modèle. On suppose que l'axe sensible du capteur corresponde à cette normale, c'est à dire que la géométrie de la structure est conforme à celle du modèle.

L'axe y_1 est orthogonal au plan formé par le vecteur x_1 et l'un des vecteurs x_0 , y_0 ou z_0 , le vecteur sélectionné étant celui pour lequel la valeur absolue du produit scalaire est maximum.

L'axe z_1 est orthogonal aux vecteurs x_1 et y_1 . Un changement de base est fait sur le modèle EF pour obtenir les déplacements dans les repères locaux.

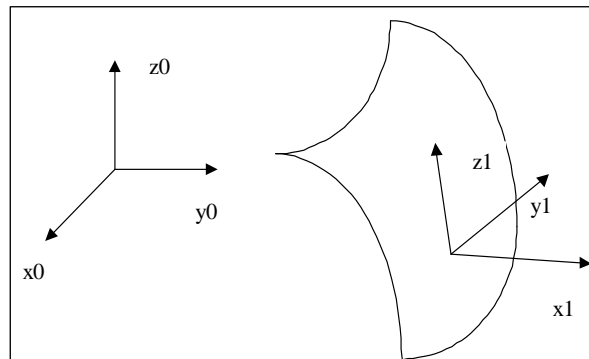


Fig III. 8: Définition du repère local

■ Instrumentation – Calibration des capteurs

Dans ce paragraphe, nous faisons l'inventaire (Tab III.1) des outils utilisés lors des acquisitions de FRF.

Le logiciel d'acquisition modale utilisé est : TEST.LAB de LMS avec son module « *Modal Analysis* » pour l'identification modale. La chaîne d'instrumentation est composée des appareillages suivants :

Type d'appareil	Nombre
Tête d'impédances BK type 4367 (capteurs de force + accéléromètre)	2
Accéléromètres BK type 4394	36
Amplificateurs de charge BK type 2646	2
Amplificateurs de tension BK type WB1328	33 voies utilisées
Amplificateurs de tension PCB	5 voies utilisées
Amplificateurs de charge BK type 2626	2
Chaîne d'acquisition Scadas II de LMS	1
Pot électrodynamique 200N	1
Pot électrodynamique 100N	1

Tab III. 1: Description de la chaîne d'instrumentation

Spécificités des capteurs

Les capteurs utilisés ainsi que leurs caractéristiques sont résumées dans les tableaux Tab III.1 et Tab III.2. Les accéléromètres sont fixés sur la structure par un cube pour former un capteur triaxial.

En résumé, la figure Fig III.10 présente l'ensemble des moyens d'essai utilisés pour cette étude.

Type	4367	4394
Masse (gr)	13.5	3
d_G (mm)	8.6	6.4
Inerties en g.mm² (10⁻⁹ Kg.m²)		
Inertie/Gz		30
Inertie/Gx	448	50
Inertie/Ox_b	1426	172

Tab III. 2: Caractéristiques des capteurs

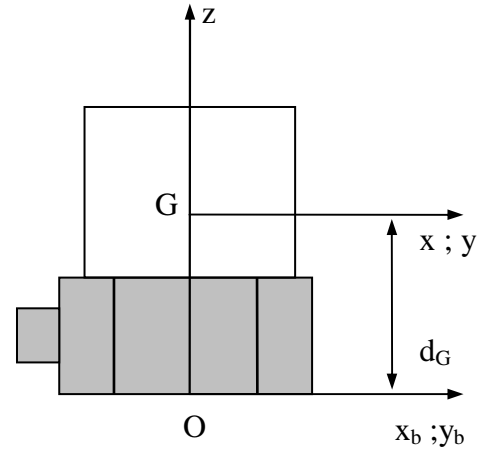


Fig III. 9: Définition des capteurs

Calibration des voies de mesure

Chaque voie de mesure (accéléromètre et son amplificateur de tension associé) est calibrée par comparaison à l'aide d'un accéléromètre de référence VC110 pour un niveau d'accélération de 0.1m/s^2 . Les cellules de force sont calibrées à 159 Hz par différences de forces d'inertie de 3 masses ajoutées sur les cellules.

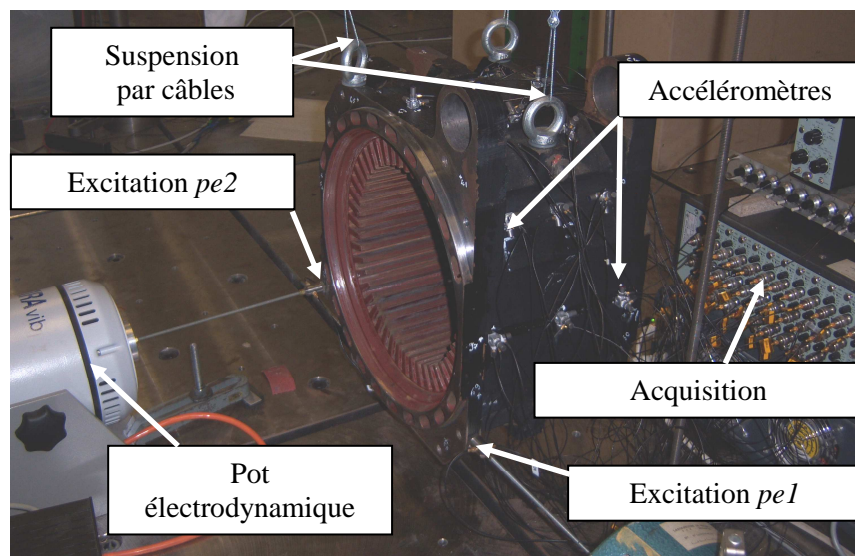


Fig III. 10: Moyens d'essais (stator nu architecture 1)

■ Conditions aux limites

Le stator est testé en libre - libre et suspendu par trois « câbles » en trois points (Fig III.11).

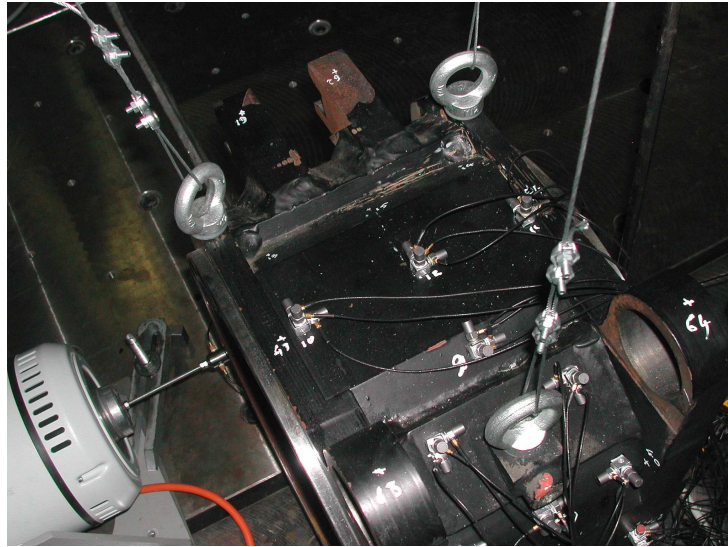


Fig III. 11: Suspension en trois points

L'ensemble du montage est montré sur la figure Fig III.12 (vue avant) et figure Fig III.13 (vue arrière).

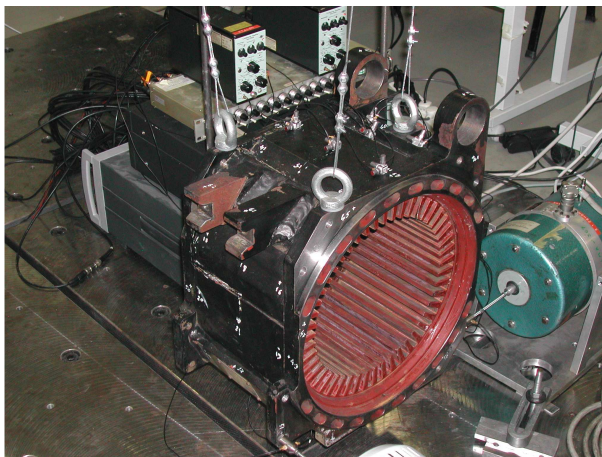


Fig III. 12: Ensemble du montage (vue avant)

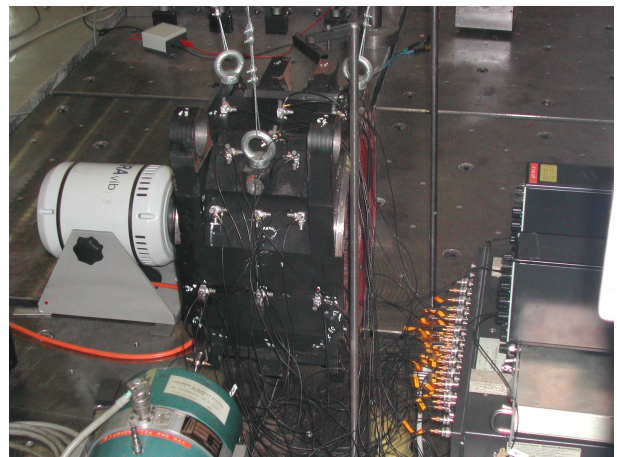


Fig III. 13: Ensemble du montage (vue arrière)

▪ Choix des points d'excitation

Le choix des points d'excitation doit respecter les critères suivants :

- exciter le maximum de modes de la structure dans la bande fréquentielle [0-2000 Hz] ;
- être accessible avec les pots d'excitation ;
- ne pas influencer sur les valeurs des paramètres modaux, en apportant localement une masse ou une raideur non négligeable par rapport aux masses et raideurs généralisées identifiées pour les différents modes.

Les deux points d'excitation retenus sont montrés sur les figures (Fig III.14 et Fig III.15).

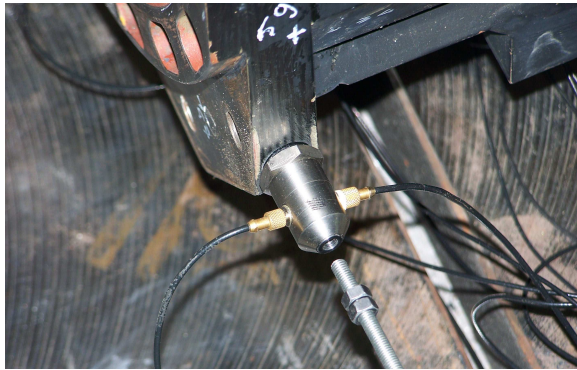


Fig III. 14: 1^{er} point d'excitation (pe1)

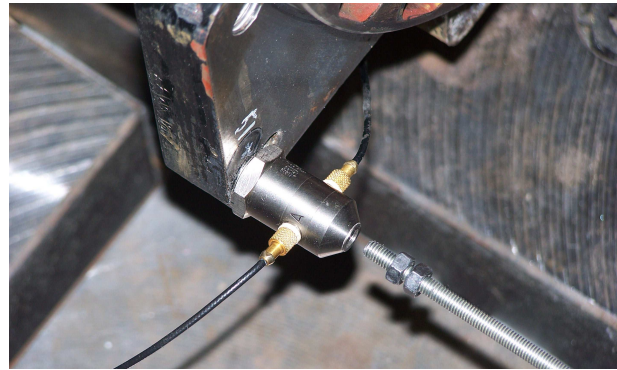


Fig III. 15: 2^{ème} point d'excitation (pe2)

■ Implantation des capteurs

Lors des essais, 65 points de mesure ont été sélectionnés sur le stator. Chaque point a été instrumenté dans les trois directions. Compte tenu de la capacité en nombre de voies du système d'acquisition, la campagne de mesure a été réalisée en 6 fois par déplacements de 11 ou 12 triaxes à chaque manipulation. Pour chaque déplacement, la répartition des masses ajoutées est légèrement différente sur la structure testée. Cela dit, nous estimons que l'influence de la masse des capteurs est négligeable par rapport à la masse totale de la structure. En effet, avec une valeur de 10g pour chaque capteur triaxial, l'apport de ceux-ci est de 0.1% dans le cas de l'instrumentation du stator nu et de 0.07% dans le cas du stator équipé. Nous avons néanmoins vérifié cette hypothèse sur le modèle éléments finis en comparant son comportement avec et sans masses ajoutées aux positions des capteurs.

Les positions des points instrumentés sont présentées sur la figure Fig III.16 (illustration sur le modèle avec des points rouges précisant les positions des capteurs) et la figure Fig III.17 (illustration sur la structure).

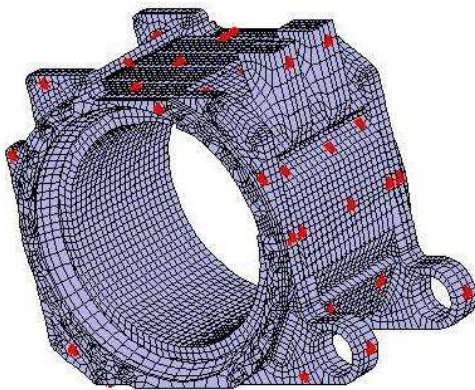


Fig III. 16: Emplacement des capteurs sur le modèle

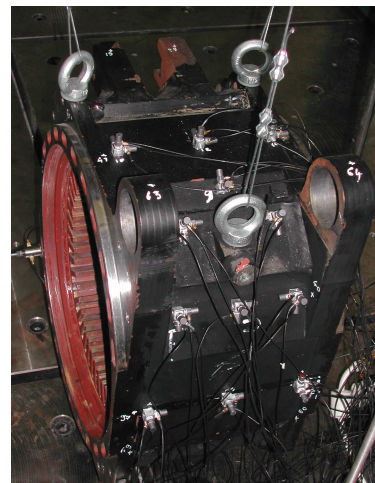


Fig III. 17: Emplacement des capteurs sur la structure

■ Acquisition des fonctions de transfert

Le système d'acquisition est configuré de la manière suivante :

- Excitation multipoints en bruits blancs décorrélés de type *random* à 100% ;
- Fenêtrage de toutes les voies de type *Hanning* ;
- Bande d'acquisition de fréquences : 0 à 2500 Hz ;
- Fréquence de coupure des filtres anti-repliements : 2000 Hz ;
- Nombre de raies fréquentielles : 16 384 ;

- Nombre de moyennes : 200 ;
- Estimateur : *HI*.

Un ajustement des gains d'entrée « *autorange* » est réalisé systématiquement sur toutes les voies avant chaque mesure de fonctions de transfert.

L'obtention des fonctions de transfert se fait en excitation *monopoint* : soit deux excitations en différées.

L'acquisition de l'ensemble des fonctions de transfert nécessite de faire 6 passages. Les 40 voies de mesures utilisées comprennent :

- 2 capteurs de force afin de mesurer les forces réelles injectées dans la structure ;
- 2 capteurs d'accélération situés en face des forces ;
- 36 capteurs d'accélération répartis sur le stator en 12 capteurs triaxiaux.

b) Validation des conditions d'essais

Nous présentons, tableau Tab III.3, quelques fonctions de transferts mesurées sur le stator pour les deux points d'excitation :

N° courbe	Enregistrement	N° du point d'excitation
c.1	1	<i>pe1</i>
c.2	1	<i>pe2</i>
c.3	2	<i>pe1</i>
c.4	2	<i>pe2</i>

Tab III. 3: Définition des courbes de fonction de transfert

On constate que pour l'ensemble des 6 manipulations, correspondants aux déplacements successifs, les fonctions de transferts obtenues sont identiques. Nous pouvons en conclure que les essais sont reproductibles.

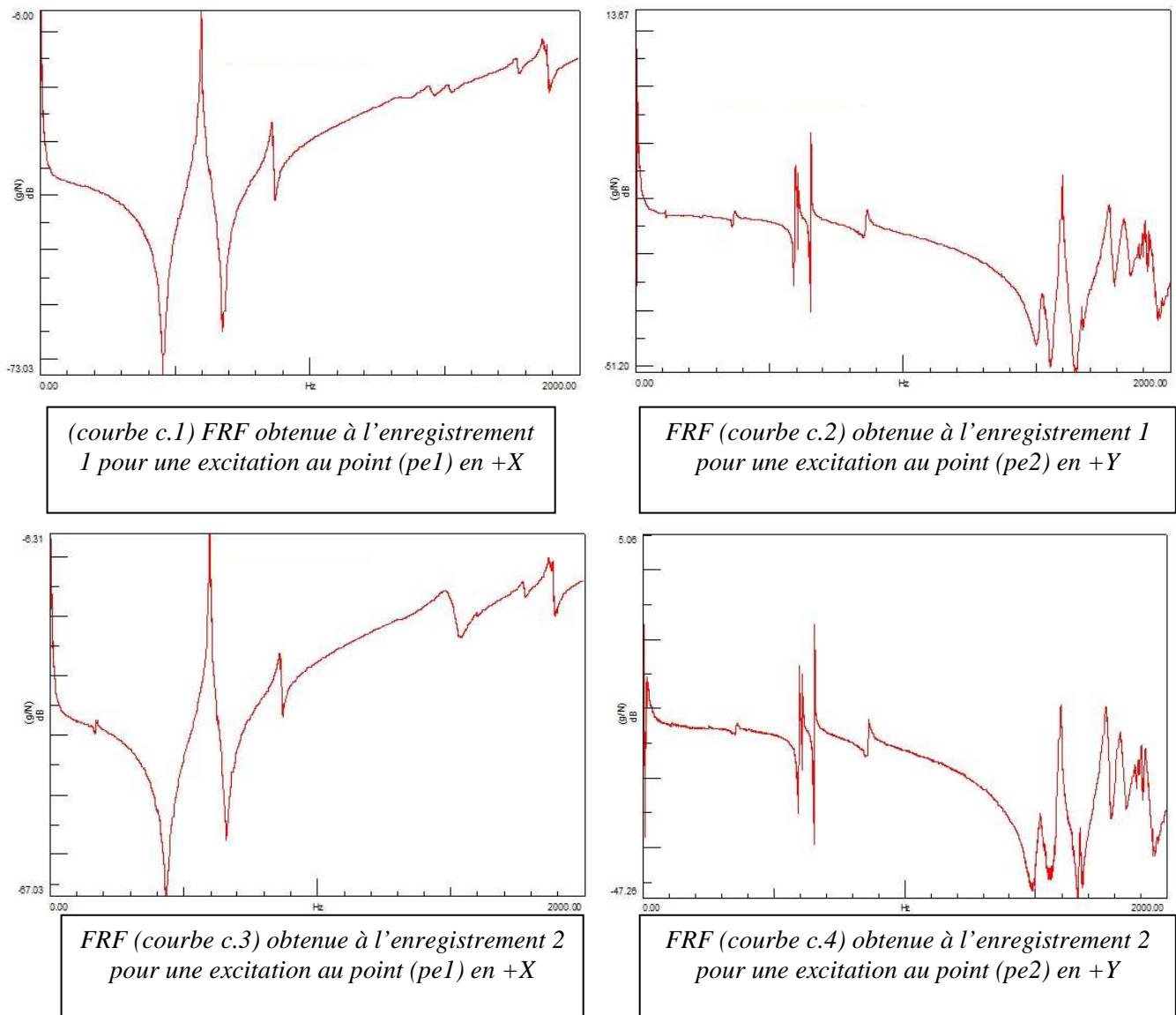


Fig III. 18: FRF pour la validation des conditions d'essais

c) Résultats de l'identification modale

Après les dépouillements des fonctions de transfert représentées par les 195 accéléromètres, on obtient 9 modes dans une bande fréquentielle de 0 à 2000 Hz. Les principaux résultats des 6 manipulations sont regroupés tableau Tab III.4.

Les amortissements modaux identifiés ont des valeurs qui restent dans la moyenne des niveaux d'amortissement rencontrés en général dans les structures mécano-soudées. Les déformées modales identifiées sont présentées dans le tableau Tab III.5. Nous pouvons constater qu'elles s'apparentent à des déformées typiques d'un cylindre épais. Ceci confirme la présence de modes non radiaux (paragraphe III.2, figures (Fig III.5 et Fig III.6) et ainsi la nécessité d'une modélisation en 3 dimensions. En effet ; s'il a été démontré que la rigidité d'un ensemble feuilleté isolé est faible dans le

sens de l'empilement [142], les modes non-radiaux sont par contre présents en raison de la rigidité non-négligeable de la carcasse.

Mode	<u>Fréquences</u>		<u>Amortissement</u>	
	Moyenne des 6 manip. (Hz)	Ecart type	Moyenne des 6 manip.(%)	Ecart type
1	597.7	0.3	0.226	0.003
2	610.4	0.2	0.046	0.003
3	656.0	0.1	0.057	0.002
4	862.8	1.0	0.612	0.056
5	1522.5	1.3	0.665	0.029
6	1596.5	0.7	0.156	0.048
7	1671.2	0.3	0.132	0.028
8	1772.3	1.2	0.356	0.026
9	1832.9	7.4	0.601	0.048

Tab III. 4: Fréquences propres (Hz) et amortissements modaux (%) identifiés

III.3.1.1.2. Caractérisation par ultrasons d'un empilement feuilleté de tôles

Après s'être intéressés au comportement dynamique du stator nu dans son ensemble, et dont le composant mal maîtrisé est essentiellement le cœur ferromagnétique, nous nous intéressons particulièrement dans ce paragraphe à celui-ci en étudiant la maquette d'un empilement feuilleté. En nous basant sur une idée introduite par [131] afin de caractériser les propriétés mécaniques d'un moteur électrique par ultrasons, nous reproduisons son schéma expérimental. L'idée développée dans [131] a consisté à considérer le stator, de faibles dimensions (cube d'une dizaine de centimètres de côté), comme une « boîte noire » homogène dont on peut estimer les modules de Young radial et axial par une technique non destructive à savoir un essai ultrasons [26, 53, 76, 110].

Le principe de la méthode consiste à mesurer la célérité de propagation « c » des ondes ultrasonores transversales [53, 76] dans un milieu homogène en utilisant deux transducteurs piézoélectriques (émetteur et récepteur placés de part et d'autre de la structure) mesurant le temps de passage de l'onde dans le milieu étudié (figure Fig III.19).

Rappelons que la célérité de l'onde calculée « c » est liée, dans un milieu homogène, aux caractéristiques matérielles de celui-ci représentées par la relation suivante :

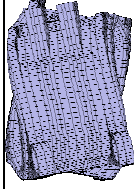
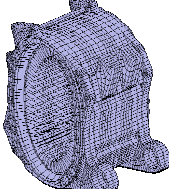
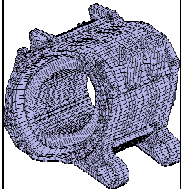
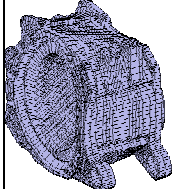
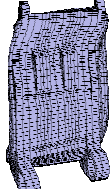
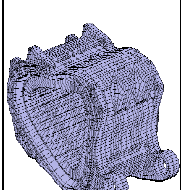
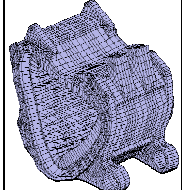
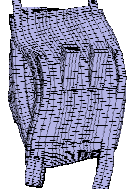
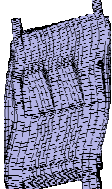
$$E = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{(1 - \nu)} \rho c^2 \quad (\text{III.1})$$

dans le cas où la longueur d'onde est très inférieure à la hauteur du milieu (distance traversée). Autrement, elle est donnée par la relation :

$$E = \rho c^2 \quad (\text{III.2})$$

dans le cas où la longueur d'onde est du même ordre de grandeur (voire inférieure) à la distance parcourue.

où : E (MPa), ρ (kg.m^{-3}) et ν représentent respectivement le module de Young, la densité et le coefficient de Poisson du matériau traversé par l'onde.

Mode	Déformée	Mode	Déformée	Mode	Déformée
#1 (non radial)		#2 (radial pur)		#3 (radial pur)	
#4 (non radial)		#5 (non radial)		#6 (radial pur)	
#7 (radial pur)		#8 (non radial)		#9 (non radial)	

Tab III. 5: Déformées modales expérimentales

Utiliser cette technique pour caractériser un matériau suppose donc que celui-ci est homogène, hypothèse que nous considérons valable dans le cas du feuilleté. Cette hypothèse est confortée par le fait que l'assemblage feuilleté est imprégné de résine immiscée dans les interstices. Notons que l'intensité ultrasonore I de l'onde est atténuée par les effets d'absorption et de diffusion traduits par la relation :

$$I = I_0 \exp(-2\alpha x) \quad (\text{III.3})$$

où : I_0 (W.m^{-2}), α (m^{-1}) et x (m) représentent respectivement l'intensité ultrasonore initiale, le coefficient d'amortissement du milieu et la distance traversée.

En plus de ces effets, l'atténuation est due essentiellement, dans le cas du feuilleté, au phénomène de réfraction important lors du passage entre deux milieux d'indices très différents, en l'occurrence l'acier et le polymère.

La présence de la résine est donc primordiale pour la continuité du transport de l'énergie de l'onde ultrasonore même si celle-ci est au bout du compte très fortement amortie. Un empilement feuilleté non imprégné de résine ne transmettra aucune intensité sur une distance correspondant à plus de 2 couches successives.

C'est pour cette raison que la hauteur de la maquette d'essai, correspondant à la distance parcourue par l'onde ultrasonore, a été choisie avec une faible valeur. Elle correspond à la hauteur maximale pour

laquelle l'onde sonore, générée par les moyens d'essais en notre disponibilité, fasse au moins une traversée complète du milieu sans qu'elle ne soit complètement atténuée ou difficilement détectable par le transducteur de réception.

Pour des raisons techniques, notamment la faible confiance accordée à l'essai lors du placement des transducteurs perpendiculairement aux couches du feuilleté (Fig III.19 (b)), nous nous restreignons dans ce paragraphe à la caractérisation du module de Young dans le sens axial, autrement dit au sens transversal à l'empilement.

L'utilisation de cette méthode, notamment l'expression du module de Young en fonction de la célérité de l'onde, est propre aux matériaux homogènes isotropes. Le but de l'utilisation de cette technique dans notre cas est de trouver une estimation du module de Young axial d'un feuilleté.

La figure Fig III.20 illustre le matériel utilisé pour la réalisation de l'essai par ultrasons. La maquette testée est imprégnée de résine et a une hauteur de 15mm. Deux transducteurs (2.25 MHz/50) sont utilisés.

La figure Fig III.19 illustre le principe de mesure de la célérité de l'onde ultrasonore.

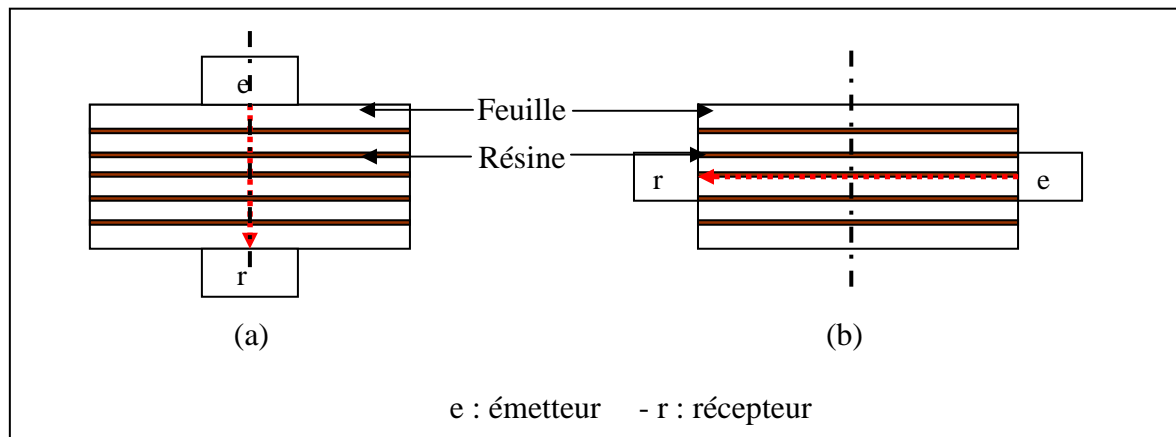


Fig III. 19: Mesure des modules de Young axial (a) et radial (b) d'un empilement de feuilles imprégné de résine

Il suffit de diviser le temps de progression par la hauteur de la structure pour obtenir la célérité de l'onde ultrasonore dans le milieu traversé.

En utilisant l'expression (III.2), le module de Young correspondant à l'essai dans le sens axial de l'empilement de tôles est de :

$$E = 26850 \text{ MPa}$$

Hormis le fait que cette valeur confirme la propriété de faible rigidité axiale d'un empilement de tôles, elle permet d'estimer, par une méthode directe, ce paramètre. Cette valeur initialisera donc le processus de recalage de modèle qui sera détaillé dans le paragraphe III.3.4.3.

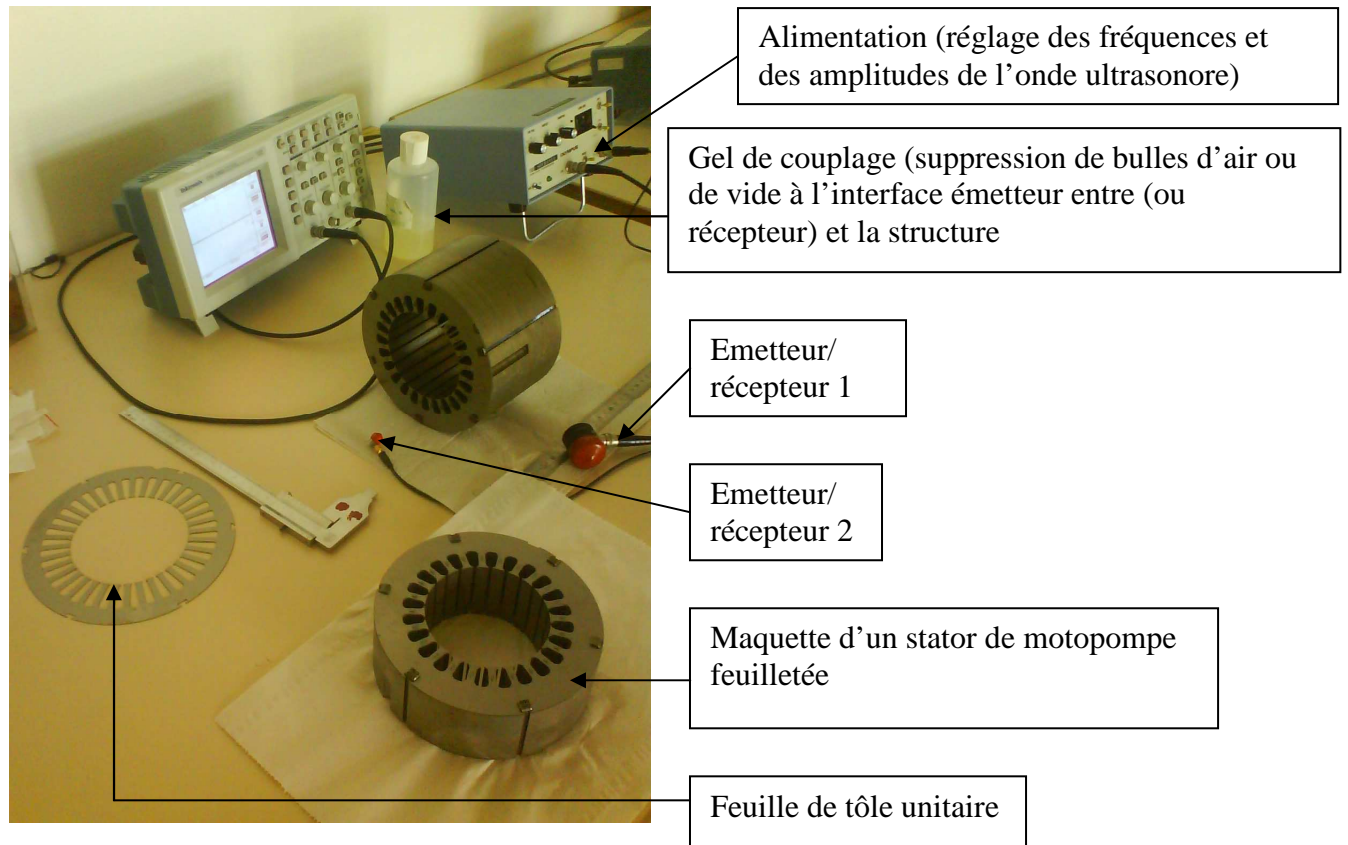


Fig III. 20: Protocole expérimental de caractérisation du module de Young axial d'un empilement feuilleté par méthode ultrasons

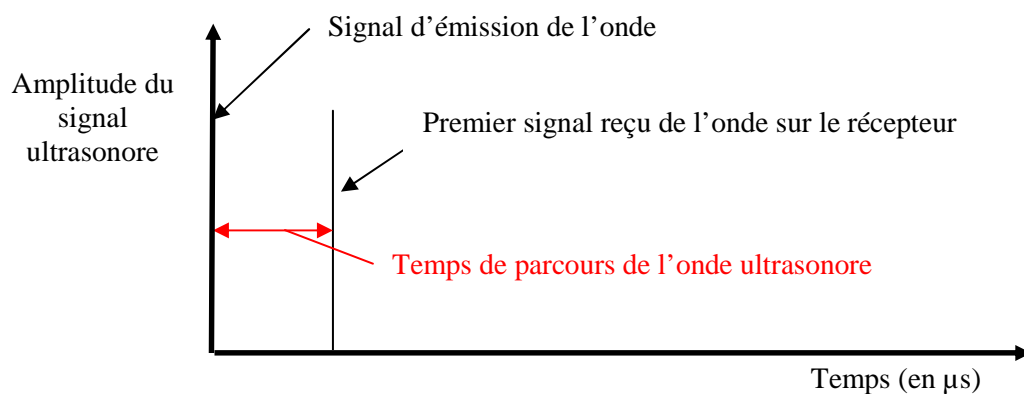


Fig III. 21: Schéma d'acquisition du temps de passage de l'onde ultrasonore dans une structure

III.3.1.2. Caractérisation du comportement du stator bobiné

III.3.1.2.1. Analyse modale expérimentale

▪ Instrumentation

Dans cette partie, nous ne présenterons pas en détails le type d'instrumentation ni les conditions d'essais mises en œuvre pour le stator bobiné. Nous soulignons que la structure étudiée ici est un stator de même série que celui étudié précédemment, à savoir un stator de d'architecture de type 1. Le stator comporte désormais des bobinages, qui avaient été retirés du stator nu précédent.

L'instrumentation et les conditions d'essais ont été reproduites à l'identique par rapport à celle du stator nu dans la mesure où :

- La suspension du stator est faite en libre-libre. Les mêmes points d'accrochage que dans le cas du stator nu sont reportés.
- Les capteurs et les forces d'excitation ont été positionnés dans la structure sur les mêmes coordonnées des points de mesure que dans le stator nu.
- Les mêmes pots vibrants, positionnés aux coordonnées d'excitation du stator nu, ont été utilisés
- Les mêmes repères locaux et globaux ont été reproduits. Cet aspect pratique des essais est respecté essentiellement pour supprimer le risque d'erreur de reproductibilité des essais par rapport au cas du stator nu.
- Nous avons utilisé également le même logiciel d'acquisition et procédures de calibrage des voies de mesures.

La masse mesurée du moteur avec bobinage est de 165 Kg, alors que celle du moteur nu est de 120 Kg. La masse supplémentaire de 45kg représente donc celle des bobinages.

La figure Fig III.22 représente l'ensemble des moyens d'essais utilisés pour cette étude.

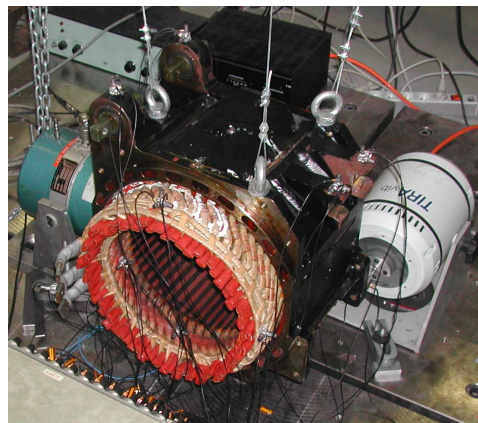


Fig III. 22: Essais sur le stator bobiné

■ Fréquences propres et FRF mesurées

Nous présentons (Fig III.23 et Fig III.24) les FRF obtenues pour les deux configurations des stators nu et bobiné.

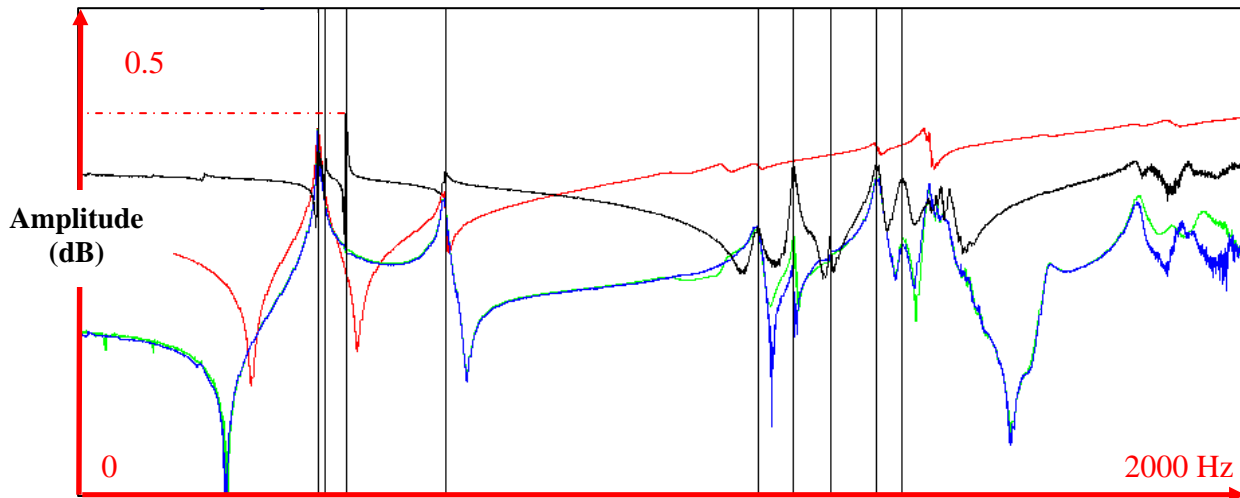


Fig III. 23: FRF du stator nu (sur 4 ddls capteurs)

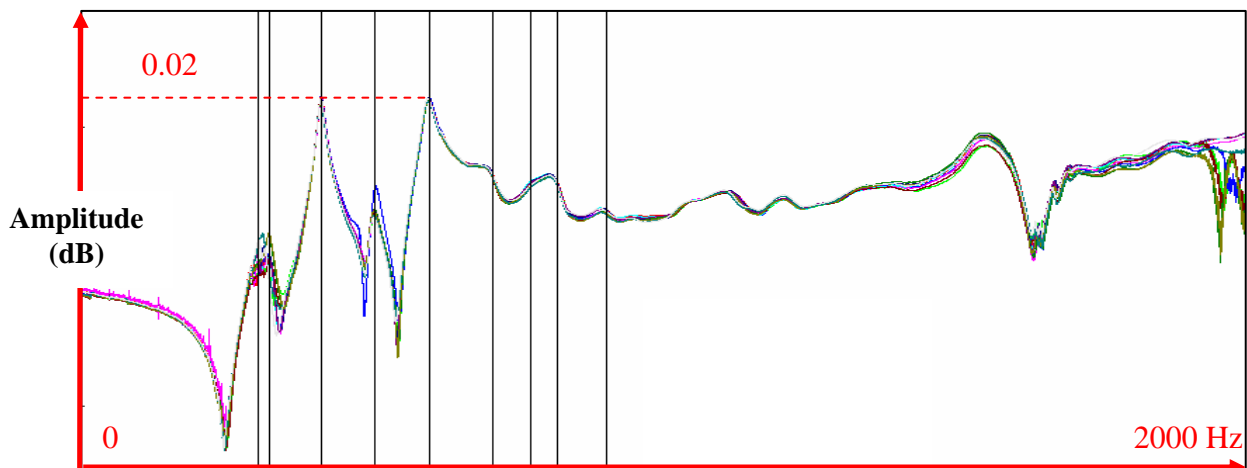


Fig III. 24: FRF du stator bobiné (sur 4 ddls capteurs)

Nous remarquons que :

- Par rapport au stator nu, les fréquences propres du stator bobiné diminuent nettement. Cette baisse des fréquences, globalement de l'ordre de -10% à -40%, s'explique par l'introduction importante de la masse du bobinage (une participation en masse de 27%).
- L'amortissement étant relativement important dans le cas du stator bobiné, les niveaux des FRF sont tellement faibles qu'il est difficile d'identifier les modes au delà du 6^{ème}. En effet, on constate une chute de l'amplitude maximum du stator bobiné de 28 dB par rapport au stator nu. Les valeurs des amortissements relatifs aux premiers modes élastiques identifiés sont résumées dans le tableau Tab III.6.

Cet amortissement relativement important est principalement introduit par le bobinage et par les liaisons bobinage/encoches de l'empilement feuilleté. En effet, le bobinage en lui-même est un assemblage « composite ». La présence de plusieurs couches de cuivre avec une interface en résine de polymère dans chaque bobine facilite un mouvement de glissement entre ces dernières.

L'interface bobinage/encoches du feuilleté est un isolant imprégné par une résine de polymère. L'interface n'assure donc pas une liaison parfaitement rigide.

Mode	Fréquences		Amortissement	
	Moyenne des 6 manip. (Hz)	Ecart type	Moyenne des 6 manip.(%)	Ecart type
1	446.8	1.2	1.516	0.002
2	572.6	1.2	1.272	0.003
3	676.6	1.3	1.651	0.002
4	785.1	1.6	1.623	0.042
5	911.1	2.5	1.621	0.026

Tab III. 6: Amortissements modaux des premiers modes élastiques du stator bobiné

■ Déformées modales mesurées

Nous présentons ici les principales observations après l'identification modale et notamment les variations sur les déformées modales observées entre le stator nu et le stator bobiné :

- Si les déformées modales du stator nu peuvent être simplement assimilées à des déformées typiques d'un cylindre, celles du stator bobiné le sont moins (tableau Tab III.6). Et bien que la rigidité du bobinage cuivreux soit plus faible que celle de la carcasse en acier du stator, il n'en est pas moins influent sur ses fréquences et vecteurs propres. Cette présence se traduit par la faible corrélation entre les déformées modales des stators nu et bobiné, corrélation qui est réalisée sur des points de mêmes coordonnées. La figure Fig III.25 illustre cette remarque à travers la matrice MAC calculée entre les vecteurs propres identifiés respectivement des stators nu et bobiné.

Rappelons que les éléments de la matrice MAC (*Modal Assurance Criterion*) quantifient la corrélation entre les vecteurs propres de deux bases à l'aide du produit scalaire normalisé suivant :

$$MAC_{\nu\sigma} = \frac{(x_\nu^t y_\sigma)^2}{\|x_\nu\|^2 \|y_\sigma\|^2}, \text{ où } x_\nu \text{ et } y_\sigma \text{ sont respectivement les } \nu^{\text{ème}} \text{ et } \sigma^{\text{ème}} \text{ modes propres}$$

des deux bases à comparer. Ces deux vecteurs sont de même dimensions et appartiennent à $\mathfrak{R}^{n,1}$. Les éléments calculés sont tous normalisés à 1. Plus la valeur de $MAC_{\nu\sigma}$ est proche de 1, plus les deux modes x_ν et y_σ sont corrélés. Dans le cas d'une corrélation calcul-mesure, la base de vecteurs mesurés est prise comme référence. Des valeurs de MAC mesure-calcul élevées signifient que la base calculée est prédictive des modes mesurés.

Dans le cas de la présente corrélation avec les modes mesurés, seuls les modes 1 et 5 du stator bobiné sont appariés à des modes du stator nu avec des valeurs de MAC de plus de 80%. Les erreurs fréquentielles relatives sur ces deux modes sont respectivement de +33% et -5%. Ceci montre globalement une très faible corrélation d'ensemble entre les comportements des deux structures.

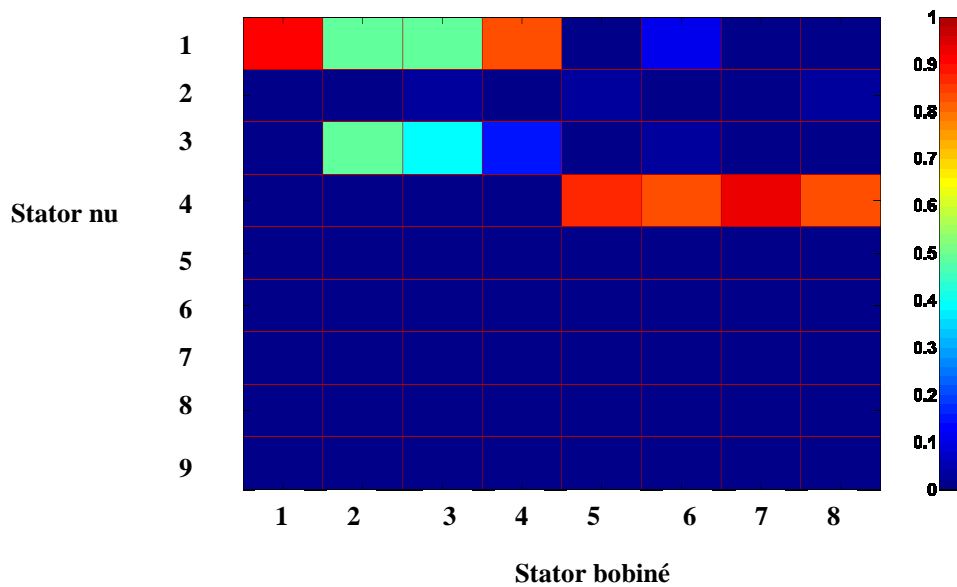


Fig III. 25: Impact du bobinage sur les MAC mesurés : stator bobiné / stator nu

- Les déformées modales du stator bobiné peuvent être classées en 2 catégories.

La figure Fig III.26-a illustre un mode de cylindre non radial pur. La figure Fig III.26-b indique que l'ovalisation est plus prononcée sur une des extrémités du stator. Cette asymétrie des déformées n'était pas présente dans le comportement du stator nu et se justifie par la géométrie et les différentes rigidités du bobinage d'une extrémité à l'autre, en raison notamment de la présence du cercle de phase uniquement sur une extrémité du stator.

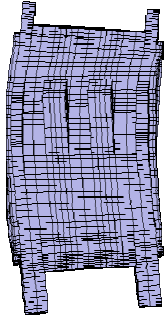
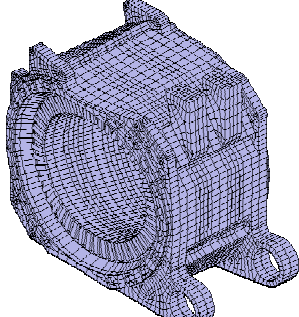
<p>-a-</p> 	<p>-b-</p> 
<p>Déformation non radiale pure classique</p>	<p>Sur l'extrémité en avant de la figure (b), les amplitudes des déformations sont plus importantes sur la face avant par rapport à l'autre face. Une dissymétrie est introduite par le bobinage.</p>

Fig III. 26: Types de déformées modales du stator bobiné (représentation sans têtes de bobines)

III.3.1.2.2. Essai de confirmation sur un stator de même série

Compte tenu de la complexité de l'assemblage des stators bobinés, il est important d'estimer l'effet du processus de fabrication sur leur comportement dynamique. Notons qu'il est difficile de mener une étude de dispersion sur un large panel de stators ou un échantillon de plusieurs dizaines de machines en raison de la lourdeur de la mise en place d'un tel protocole. Nous nous contentons dans ce travail de

réaliser une analyse modale expérimentale supplémentaire sur un stator bobiné de la même architecture et de la même série que le stator étudié jusqu'à présent, à savoir d'architecture 1.

Lors de cette étude, nous avons reproduit à l'identique les mêmes démarches et conditions expérimentales (type de suspension, excitation, capteurs...etc) que celles adoptées lors de l'essai précédent.

Mode	<u>Stator 2</u> Fréquence (Hz)	Mode	<u>Stator 1</u> Fréquence (Hz)	Ecart fréquentiel (%)	MAC (%)
1	434.6	1	446.8	2.8	80.9
2	558.3	2	572.6	2.6	85.3
3	652.2	3	676.6	3.7	92.6
4	763.5	4	785.1	2.8	91.0
5	881.6	5	911.1	3.4	89.1

Tab III. 7: Bilan de la confrontation entre les essais dynamiques sur deux stators de même série

Le tableau Tab III.7 résume les écarts de confrontation entre les comportements dynamiques des stators de même série 1 et 2. L'écart fréquentiel est en moyenne de 2.8% pour les 4 premiers modes. Un écart de +7.1% est par ailleurs enregistré pour le mode 6. Rappelons qu'au delà de 700 Hz, en zone de moyennes fréquences, les FRF mesurées présentent un couplage entre les modes traduit par un « aplatissement » des réponses (Fig III.24). Ce comportement, lié à un amortissement relativement important, justifie une erreur plus importante lors de l'identification modale. Concernant les corrélations entre les déformées modales, traduites par les valeurs du MAC, elles sont supérieures à 80% sur l'ensemble des modes identifiés. Cette valeur est acceptable pour un assemblage industriel aussi complexe.

Nous considérons à la fin de cette étude qu'un modèle « bien corrélé avec la mesure » devra avoir une précision au moins supérieure aux écarts mesurés entre les stators 1 et 2 de même série.

III.3.2. Construction du modèle éléments finis

La démarche suivie dans ce paragraphe consiste à établir un premier modèle « a » de base avec des hypothèses établies *a priori* notamment sur les représentativités géométrique (géométrie interne et prise en compte des encoches, contacts) et matérielle (estimation des coefficients matériaux du cœur feuilleté). L'objectif étant d'établir un modèle représentatif initialisant le recalage par méthode de sensibilité. La solution assurant la meilleure corrélation avec la mesure sera retenue pour initialiser le processus de recalage.

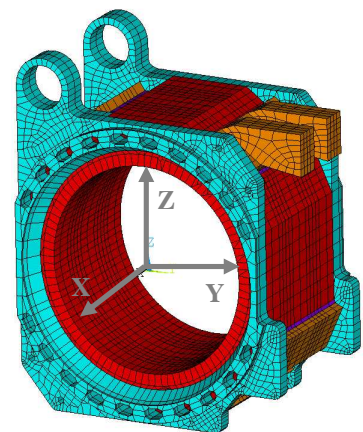


Fig III. 27: modèle a du stator de type 1

III.3.2.1. Modélisation du stator nu

III.3.2.1.1. Représentativité géométrique

■ Modélisation initiale « a » : généralités

Rappelons que le stator du moteur d'architecture 1 se compose de 2 sous-structures :

- Le noyau feuilleté : appelé également empilement de tôles. Il représente le cœur de la structure et sa masse représente environ 70% de la masse totale du système.
- La carcasse du stator : ensemble d'éléments en acier massif soudés sur le noyau de tôles et assurant son maintien. Elle comprend :
 - Deux plateaux de serrage qui maintiennent l'empilement de tôles par ses deux extrémités.
 - Des entretoises en acier massif au nombre de 5, elles maintiennent via des soudures l'empilement de tôles sur toute sa hauteur.
 - Des cordons de soudure considérés comme des solides en acier dans le modèle éléments finis.

La modélisation a été effectuée sous PATRAN afin de créer une interface entre le code éléments finis et les logiciels de validation et de recalage de modèle du LMARC, regroupés dans la plateforme numérique *AESOP*. La figure Fig III.27 illustre une représentation générale du premier modèle de base avec les différentes parties du stator. L'axe (X) est pris comme axe du stator.

Le modèle nu se compose de 39842 nœuds et de 25456 éléments dont 24554 éléments volumiques de type CHEXA et 902 éléments volumiques de type CPENTA. Il en résulte un modèle de 115326 ddls.

La masse totale calculée est de 123 Kg, soit un écart de 2% par rapport à la masse mesurée.

3 matériaux isotropes, correspondant aux composants de la carcasse, et 1 matériau orthotrope, correspondant à l'empilement de tôles, sont introduits pour les caractéristiques. Le détail sur la modélisation des différents composants du stator est présenté dans les paragraphes suivants.

i) Cœur feuilleté

Le noyau est composé de feuilles de tôles d'une hauteur de 200mm et de 0.35mm d'épaisseur chacune, soit environ 600 feuilles au total.

La géométrie interne d'une feuille comporte 48 encoches. Elle est modélisée par un cercle de rayon égal au rayon moyen de ces encoches (Fig III.28). La géométrie des trous de ventilations a quant à elle été respectée.

Les éléments choisis pour la modélisation sont des éléments volumiques (briques à 8 nœuds, 3 ddls par nœud). L'ensemble équivalent aux feuilles de tôles est constitué de 17754 éléments volumiques, représentant une masse totale de 87 kg, soit 71 % de la masse totale.

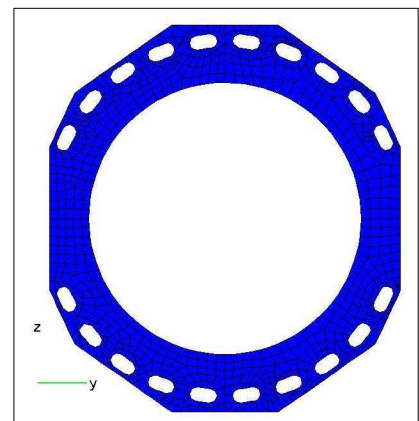


Fig III. 28: Feuilles de tôles

ii) Plateaux de serrage

Toutes les dimensions géométriques du modèle respectent les données de conception du bureau d'études ALSTOM.

Les deux plateaux sont obtenus par une symétrie miroir.

Aucune visserie n'est été prise en compte et les trous borgnes ne sont pas représentés dans le modèle. Seuls les trous de fixation des couvercles du moteur y sont représentés. Les formes courbes des plateaux sont simplifiées par des angles vifs et droits.

Les éléments choisis pour la modélisation sont des éléments volumiques (Fig III.29) (briques à 8 nœuds, 3 ddls par noeud).

L'ensemble des deux plateaux de serrage contient 5244 éléments et 9266 nœuds et pèse 23,75 kg, soit 19% de la masse totale.

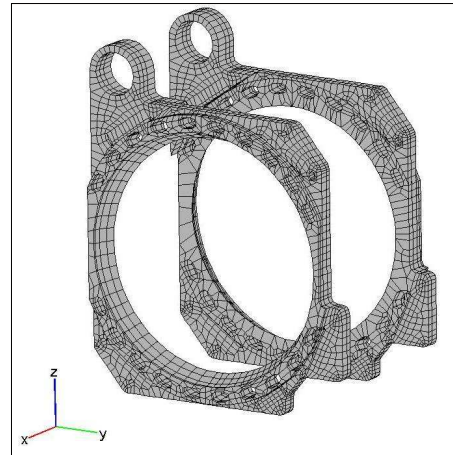


Fig III. 29: Plateaux de serrage

iii) Entretoises

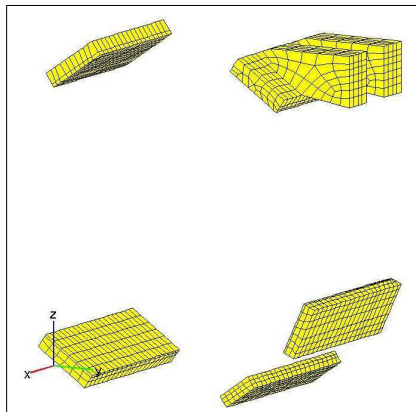


Fig III. 30: Entretoises

Là encore, toutes les dimensions géométriques du modèle respectent les données de conception du bureau d'études ALSTOM Ornans (Fig III.30).

Les extrusions de fixation dans certaines entretoises ne sont pas prises en compte. Une seule entretoise comprend deux extrusions. Seuls ces deux détails ont été représentés.

Les trous borgnes n'ont pas été pris en compte.

Toutes les jonctions de lignes de forme complexe ont été simplifiées par des angles vifs et droits.

Les entretoises ont été modélisées uniquement par les éléments volumiques, contenant 2188 éléments et 3534 nœuds. La masse des entretoises est de 12 kg, soit 9% de la masse totale du modèle.

iv) Soudures

Les cordons de soudure pris en compte dans le modèle sont uniquement ceux reliant les entretoises à la tôle sur toute sa longueur. Ils sont modélisés par des éléments prismatiques solides 3D.

Les éléments choisis pour la modélisation sont des éléments volumiques avec 268 éléments et 690 nœuds (Fig III.31). Le maillage adopté pour chaque cordon de soudure comporte : 1 élément en largeur et 20 éléments en longueur. Les propriétés du matériau sont identiques à celles des entretoises. La masse des cordons de soudures est de 0.113 kg et n'a quasiment aucune influence sur la masse totale de la structure.

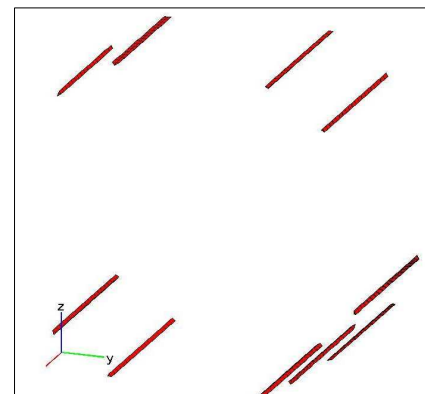


Fig III. 31: Soudures

v) Modèle de contact

Les zones reliant les plateaux de serrage et les extrémités des entretoises sont collés sans introduire aucun élément de contact, autrement dit les lignes de contact et leurs nœuds sont communs aux deux ensembles.

Dans cette première modélisation, les surfaces des plateaux de serrage et de l'extrémité de la tôle qui sont en vis-à-vis n'ont pas été collées mais uniquement « posées » l'une en face de l'autre sans qu'aucun élément de contact ne les relie. Il en est de même pour les soudures latérales. La surface inférieure de l'entretoise bien qu'elle soit en contact avec la tôle n'a pas été collée avec cette dernière. La soudure assure la liaison entre l'entretoise et l'empilement de tôles avec lequel elle est collée.

III.3.2.1.2. Représentativité matérielle

▪ Coefficients matériaux de la carcasse

La carcasse, selon le modèle « a » du stator nu est composée de deux plateaux de serrage, d'entretoises et de soudures. Toute la carcasse, y compris les éléments de soudures, est modélisée en un même matériau à savoir un acier isotrope dont les coefficients de raideur et de masse sont les suivants :

$$\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$E = 210000 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

où : ρ , E et ν représentent respectivement la densité, le module de Young et le coefficient de Poisson.

▪ Coefficients matériaux du cœur feuilleté

○ Coefficients de masse

Il est nécessaire que la masse du modèle éléments finis corresponde à la masse mesurée de la structure physique. Un ajustement de la masse de certaines zones du modèle peut donc s'avérer nécessaire si des simplifications géométriques sont introduites lors de sa construction. Or, d'un côté, la principale hypothèse, géométrique et matérielle, introduite pour la construction du modèle du stator nu réside dans le fait que nous considérons l'empilement feuilleté comme un ensemble homogène. Par ailleurs, considérer que la densité du feuilleté correspond à la densité d'une feuille unitaire revient à surestimer la masse de l'empilement et par conséquent celle du stator nu. Par conséquent, afin d'ajuster la masse du modèle éléments finis, nous réduisons essentiellement la densité du volume représentant le cœur feuilleté.

La valeur de cette densité correspond à : $\rho_{\text{feuilleté}} = 7500 \text{ kg.m}^{-3}$ au lieu de : 7690 kg.m^{-3} correspondant à la densité d'une feuille unitaire.

○ **Estimation des coefficients de raideur du cœur feuilleté par la méthode directe : application de la théorie de l'homogénéisation**

Une des principales hypothèses fortes de modélisation prise dans ce travail est de considérer l'empilement de tôles comme un matériau homogène. Cette hypothèse se justifie *a priori* dans la mesure où nous nous restreignons à l'hypothèse des petits déplacements pour laquelle la cohésion de l'ensemble des feuilles est assurée. Afin de prendre en compte son caractère feuilleté et les différences entre ses comportements axial et radial, l'ensemble est modélisé par un matériau orthotrope caractérisé, selon ses 3 axes, par 3 modules de Young, 3 coefficients de cisaillement et 3 coefficients de Poisson.

Compte tenu de sa structure alternant de manière périodique des feuilles métalliques et des fines couches de résine de polymère, comblant les interstices, nous le considérons, en plus d'être homogène en première approximation, comme un matériau composite stratifié.

Ainsi, la démarche explicitée dans le chapitre II, paragraphe II.2.3, est utilisée afin d'estimer les coefficients matériau du cœur feuilleté.

Or la structure physique du feuilleté du stator n'est pas réellement un matériau composite dans la mesure où ce n'est pas la résine de polymère qui joue le rôle de matrice assurant le maintien de l'ensemble. La cohésion des feuilles est assurée par la présence de la carcasse uniquement. Cette spécificité introduit une propriété essentielle à l'ensemble feuilleté qui réside dans le très faible couplage entre ses propriétés axiale et radiale. En effet ; nous considérons, dans la limite des petits déplacements, qu'un déplacement axial ne génère pas une dilatation radiale de l'ensemble mais en premier lieu une dilatation de la résine uniquement qui sera chassée des interstices avant que les feuilles ne soient réellement en contact. Ainsi, nous considérons que ce couplage, traduit par les coefficients de Poisson, est très faible, et que les coefficients de Poisson le sont également.

Nous appliquons la démarche détaillée dans le paragraphe II.2.3 du chapitre II selon deux variantes. Dans la première, un couplage est introduit et les coefficients de Poisson sont estimés normalement à partir des propriétés élémentaires des feuilles et de la résine. Dans la deuxième, la valeur du couplage traduite par les coefficients de Poisson sont contraintes lors du calcul à des valeurs faibles ou nuls.

Nous étudions au final 4 configurations selon que l'on impose ou non un couplage faible :

- **Cas 1** : Les coefficients de Poisson sont calculés, à l'instar des autres coefficients de raideur, à partir des raideurs des composants élémentaires du composite (résine et feuille) ;
- **Cas 2** : Avec la contrainte : $\nu_{xy} = \nu_{xz} = \nu_{yz} = 0.1$, autrement dit, le couplage est considéré faible dans toutes les directions,
- **Cas 3** : Avec la contrainte : $\nu_{xy} = \nu_{xz} = 0.1$ $\nu_{yz} = 0.294$, autrement dit, le couplage est considéré faible uniquement sur la composante axiale de l'empilement feuilleté ;
- **Cas 4** : Avec la contrainte : $\nu_{xy} = \nu_{xz} = \nu_{yz} = 0$, il s'agit du cas le plus extrême où les couplages sont tous nuls.

Pour calculer les 4 matrices et afin d'estimer les épaisseurs de la résine et des feuilles dans le volume élémentaire, ce qui revient à estimer les fractions volumiques de chacune des composantes, nous nous basons sur la densité équivalente calculée du feuilleté. En effet, le rapport entre cette valeur et la densité du volume « plein non feuilleté » équivalent donne la fraction volumique des feuilles. La fraction volumique de la résine correspond à la fraction complémentaire à 1.

La fraction volumique des feuilles V_{fe} et celle de la résine V_{res} valent respectivement :

$$V_{fe} = \frac{\rho_{\text{feuilleté}}}{\rho_{\text{feuille, unité}}} = \frac{7500}{7690} = 97.5\% \quad V_{res} = 1 - V_{fe} = 2.5\%$$

Les matrices de raideur obtenues dans les 4 cas sont respectivement : C_1 , C_2 , C_3 et C_4 telles que :

$$\begin{aligned}
 C_1 = 10^5 & \begin{bmatrix} 2.271 & 7.852 & 3.681 & & & \\ 7.852 & 8.584 & 3.512 & & & \\ 3.681 & 3.512 & 8.584 & & & \\ & & & 0.096 & & \\ & & & & 0.75 & \\ & & & & & 0.096 \end{bmatrix} & C_2 = 10^5 & \begin{bmatrix} 0.593 & 0.346 & 0.346 & & & \\ 0.346 & 2.442 & 1.026 & & & \\ 0.346 & 1.026 & 2.442 & & & \\ & & & 0.096 & & \\ & & & & 0.75 & \\ & & & & & 0.096 \end{bmatrix} \\
 C_3 = 10^5 & \begin{bmatrix} 0.585 & 0.317 & 0.317 & & & \\ 0.317 & 0.236 & 0.815 & & & \\ 0.317 & 0.815 & 0.236 & & & \\ & & & 0.096 & & \\ & & & & 0.75 & \\ & & & & & 0.096 \end{bmatrix} & C_4 = 10^5 & \begin{bmatrix} 0.247 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1.936 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1.936 & & & \\ & & & 0.096 & & \\ & & & & 0.75 & \\ & & & & & 0.096 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

La valeur du module de Young axial E_x relative au cas 4 (sans couplage) vaut 24700 MPa et correspond à la valeur identifiée par l'essai de caractérisation par ultrasons. Les valeurs correspondantes aux cas 2 et 3 (couplage faible) sont respectivement 46500 MPa et 52400 MPa. La validation de l'une de ces hypothèses se fera en confrontant les modèles correspondants aux résultats expérimentaux.

La topologie des matrices de Hooke identifiées montre qu'il s'agit, selon les hypothèses adoptées, de matrices relatives à un matériau homogène isotrope transverse.

III.3.2.1.3. Discussion sur la représentativité du modèle initial

« a »

Afin de juger de la représentativité des hypothèses géométriques et matérielles du modèle « a » construit, nous les discutons séparément.

▪ Sur la prise en compte de la géométrie des encoches

Le modèle initial « a » est construit avec l'hypothèse de simplification de la géométrie interne du stator consistant à remplacer les encoches par un rayon moyen.

Afin de juger de la pertinence de cette hypothèse quant à sa représentativité du comportement dynamique du modèle avec encoches, nous réalisons l'étude suivante :

- Nous modélisons deux structures tests, l'une est un cylindre parfait, l'autre contient des encoches sur son contour intérieur (Fig III.32). Cette dernière sera considérée comme la structure de référence.
- Dans la structure parfaite, la « denture », jouant le rôle de raidisseurs, y est remplacée par une distribution de masses ;
- Les deux structures ont le même rayon externe ;
- Dans cette étude, nous cherchons à trouver un rayon interne au cylindre parfait en faisant varier son épaisseur radiale. Le but de cette démarche est d'étudier s'il est possible de remplacer le cylindre de référence par un cylindre parfait prédictif de son comportement dynamique. Ceci permet de justifier ou non l'hypothèse de simplification de la géométrie interne par un rayon dit « équivalent ».

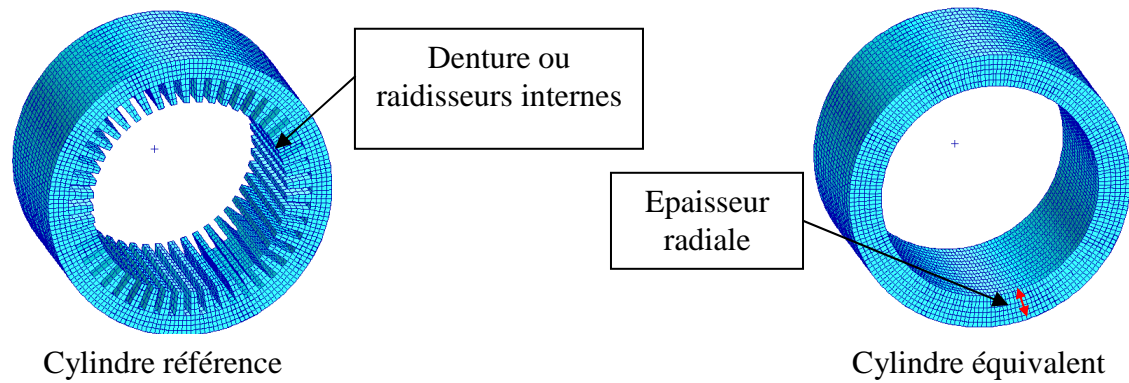


Fig III. 32: Cylindres avec et sans raidisseurs internes

La figure Fig III.33 illustre l'évolution des écarts fréquentiels, par rapport aux fréquences du modèle de référence (avec raidisseurs), du cylindre parfait en fonction de son épaisseur radiale. Elle montre que l'évolution des fréquences des modes dits « radiaux purs », qui ne font pas intervenir le comportement axial du cylindre, évoluent de manière linéaire et quasi identique. Les fréquences des deux premiers modes, dits « non radiaux » quant à elles évoluent de manière linéaire mais avec des pentes différentes. Nous remarquons ainsi que les écarts nuls, correspondants à une épaisseur et donc à un rayon interne équivalent, ne sont pas atteints à la même valeur pour tous les modes. Autrement dit, il n'est pas possible de trouver une valeur unique d'un rayon équivalent permettant d'avoir un cylindre

parfait prédictif à la fois des modes radiaux purs et non radiaux du cylindre référence.

Ceci confirme les formulations analytiques établies par Leissa [79] et par [120] sur les fréquences propres respectivement des cylindres parfaits et raidis. Ces formulations montrent d'une part une différence dans les formulations analytiques des modes radiaux purs et non radiaux. Ils montrent d'autre part la formulation spécifique des fréquences propres des cylindres raidis qui dépend des paramètres de rigidité de la « denture ».

Afin de garantir une bonne représentativité du modèle éléments finis, nous retenons donc qu'il ne serait pas précis de simplifier la géométrie interne des encoches des stators par une forme cylindrique équivalente. Le respect de la

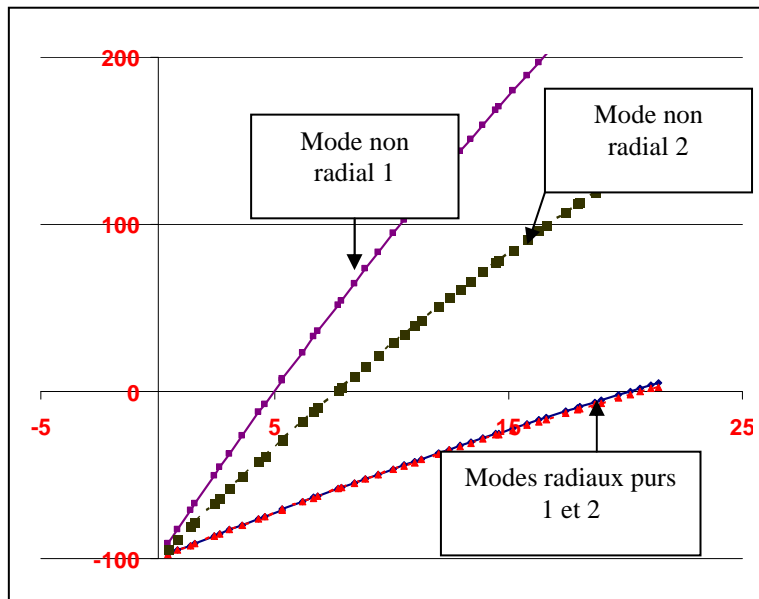


Fig III. 33: Evolution du comportement dynamique du cylindre parfait en fonction de son épaisseur radiale

géométrie des encoches dans les modèles futurs sera donc considéré comme une première règle de modélisation.

▪ Sur l'hypothèse d'homogénéisation

La méthode d'estimation des coefficients matériaux par homogénéisation est appliquée au modèle du stator nu établi avec l'hypothèse de prise en compte de la géométrie des encoches internes.

La confrontation avec les résultats expérimentaux du stator nu est résumée dans le tableau Tab III.8.

Mode exp	Fréquences (Hz)	Ecart fréquentiels (%)				MAC (%)			
		Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4
#1	597.7	1.9	-2.7	-1.7	-2.1	92.3	92.4	90.0	92.4
#2	610.4	18.6	9.2	16.3	8.3	96.5	96.5	89.2	96.5
#3	656.0	18.3	9.1	8.1	6.5	92.9	92.9	90.3	93.0
#4	863.0	-1.9	-5.7	-2.4	-6.2	93.9	94.0	89.2	94.0
#5	1522.5	-3.5	-8.9	-3.9	-4.2	81.2	81.6	81.2	81.7
#6	1596.5	17.5	-7.5	16.2	7.3	94.7	95.7	94.6	95.7
#7	1671.2		7.7	10.1	7.0		86.1	81.2	86.2
#8	1772.3	0.4	-5.9	7.6	-2.7	84.1	80.9	83.4	91.0
#9	1832.9	-12.0	-3.0	-10.6	-12.7	77.7	81.3	80.2	81.4

Tab III. 8: Hypothèse d'homogénéisation : confrontation mesure-calcul

D'après les résultats, nous pouvons aboutir aux remarques suivantes :

- Globalement l'hypothèse d'homogénéisation, avec ses deux variantes, avec et sans couplage, prédit, avec un bon coefficient MAC (supérieur à 78 %) 8 modes sur 9. Les écarts fréquentiels sont inférieurs à 19 % en valeur absolue.
- Les valeurs correspondant aux cas 2 et 4 sont globalement équivalentes. Autrement dit, les estimations avec couplage faible, dans la direction axiale, ou nul, dans toutes les directions, conduisent à des résultats de qualité équivalente.
- Même si le cas 3 (couplage faible uniquement dans la direction axiale) donne quelques résultats proches de ceux des cas 2 et 4, ils sont globalement de moins bonne précision, notamment sur les valeurs des MAC et des écarts fréquentiels #2, 6 et 7.
- La variante « sans couplage », c'est à dire avec des coefficients de Poisson nuls (cas 4), est nettement meilleure que l'hypothèse d'un couplage non nul (cas 1). En effet ; tous les modes sont prédits (plus de 81% de MAC) avec des écarts fréquentiels par rapport à la mesure de moins de 10% en valeur absolue sauf pour la 9^e fréquence (supérieure à 1800 Hz). Ceci confirme la pertinence de l'utilisation de la méthode d'homogénéisation dans cette estimation. L'hypothèse d'homogénéisation, avec un couplage faible ou nul, peut être considérée comme un bon estimateur, par voie directe, des propriétés du cœur feuilleté du stator.
- Au vue de la quasi équivalence des résultats fournis par les cas 2, 3 et 4, on peut suggérer de faire une modélisation des tôles feuilletées avec les coefficients de Poisson nuls.

Le modèle (a) ainsi construit du stator nu, et dont les hypothèses essentielles sont la prise en compte de la géométrie des encoches et l'estimation des coefficients de raideur du cœur feuilleté par méthode d'homogénéisation, sera donc retenu comme un modèle initial lors du recalage par méthode de sensibilité.

III.3.2.2. Modélisation des bobinages

La modélisation du stator nu est maintenue. On s'intéresse simplement à la modélisation des bobinages cuivreux et leur intégration dans le modèle global.

Comme nous l'avons présenté dans le paragraphe III.1, le bobinage est composé d'un sous ensemble « a » inséré dans les encoches de l'empilement feuilleté et de 2 sous ensembles extrémités « b », « c » reliés à « a » via quelques points de connexion. Afin de construire un modèle initial du bobinage, nous avons fait les hypothèses suivantes :

- Sur la géométrie (Fig III.34), tous les sous ensembles du bobinage sont modélisés par des géométries équivalentes. Le sous ensemble « a » inséré dans le stator est représenté par des éléments volumiques remplissant les encoches. Les extrémités sont représentées par des cylindres homogènes de dimensions correspondant aux dimensions réelles. La géométrie du cercle de phase n'est pas *a priori* prise en compte dans ce premier modèle global.
- Sur les liaisons du bobinage avec le reste du stator (Fig III.35), le sous ensemble « a » est « encastré » dans les encoches du stator. Chaque élément de « a » partage avec l'empilement de tôles les mêmes nœuds dans l'interface de contact. Les sous ensembles extrémités sont reliés à « a » par des éléments solides.

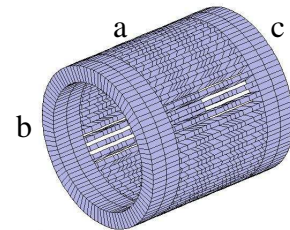


Fig III. 34: Géométrie globale du bobinage cuivreux

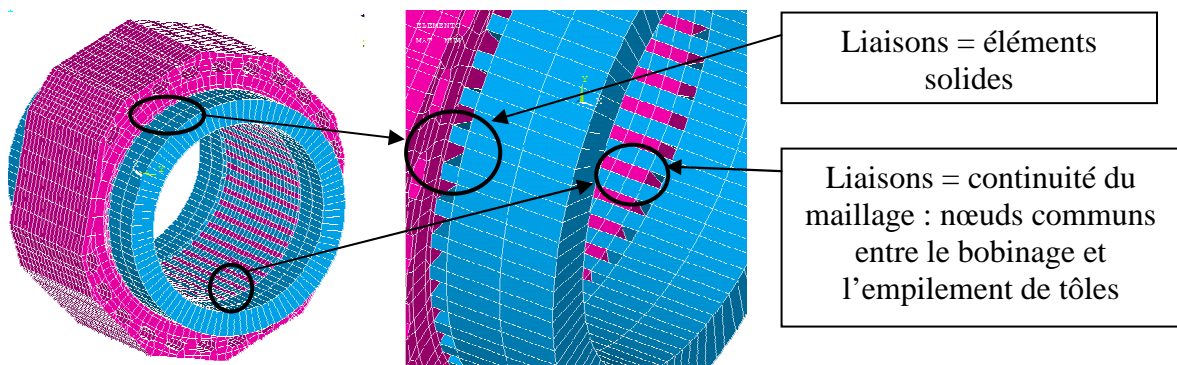


Fig III. 35: Liaisons du bobinage avec le reste du stator

III.3.2.2.1. Construction d'un modèle représentatif : hypothèses géométriques et matérielles

Afin de construire une modélisation initiale représentative du comportement dynamique du bobinage et de leur effet sur le comportement global du stator, nous avons réalisé 4 modèles de degré de complexité croissant. Les 4 modélisations sont ensuite confrontées avec les résultats expérimentaux. Comme pour l'étude du stator nu, la représentativité des modélisations est ensuite jugée.

▪ **Modèle I - monobloc isotrope** (Fig III.34) :

L'ensemble du bobinage a été modélisé en un monobloc de matériau isotrope correspondant au cuivre (tableau Tab III.9). La densité du matériau est estimée de telle sorte que la masse totale du modèle bobiné soit équivalente à celle du stator réel.

▪ **Modèle II - 5 blocs isotropes** (Tab III.10):

Cette modélisation est assez fine car elle distingue toutes les zones présentant probablement des défauts de modélisation. Elle définit en particulier les zones de liaisons (4) et (5) entre le sous ensemble encastré (3) et les extrémités libres du bobinage (1) et (2). Les valeurs des matériaux introduites ici (tableau Tab III.9) ont été calculées après une étude de sensibilité de leur effet sur les fréquences propres et déformées modales de l'ensemble du stator bobiné, en partant de la valeur nominale cuivre. Ces valeurs sont estimées manuellement et sont données en ordre de grandeurs afin d'obtenir une bonne confrontation avec les mesures.

Les densités sont simplement estimées de sorte que la masse totale du bobinage soit égale à sa masse mesurée.

▪ **Modèle III - 3 blocs orthotropes** (Tab III.10):

Nous proposons une nouvelle modélisation avec cette fois 3 matériaux orthotropes indépendants dans les 3 zones illustrées dans le tableau Tab III.10. Les zones de liaisons présentées dans le modèle II sont intégrées dans les parties extrémités 1 et 2. Ce nouveau modèle comporte moins de sous ensembles que le modèle II mais il contient plus de paramètres matériaux. Les valeurs des rigidités estimées sont des ordres de grandeur permettant d'obtenir une bonne confrontation avec les mesures. La méthode d'estimation de la répartition des masses est la même que celle utilisée dans le modèle II.

▪ **Modèle IV - 4 blocs orthotropes** (Tab III.10):

Ce modèle reprend les mêmes hypothèses que le modèle III et prend en compte en plus la partie 4. Celle-ci représente la zone des cercles de phases, présent dans la structure réelle et qui n'a pas été représentée dans les modélisations précédentes. La dissymétrie des types de déformées modales observée dans les résultats expérimentaux peut être due à sa présence. Le modèle est donc plus riche que les modèles précédents dans la mesure où il comprend plus de paramètres matériaux.

Comme le modèle III, les valeurs estimées des rigidités de 1, 2 et 4 sont des ordres de grandeur. Les valeurs des rigidités de 3 sont obtenues par méthode d'homogénéisation. La démarche est la même que celle présentée dans la modélisation de l'empilement feuilleté, à savoir une approche unidirectionnelle dans laquelle les coefficients de Poisson sont nuls.

Le bobinage se compose du cuivre, de l'isolant et de la résine. Dans cette modélisation, nous convenons de retenir la participation du cuivre et de la résine.

Dans ce modèle, nous jugeons en plus que l'estimation de la masse de chaque zone est importante car le bobinage introduit des masses réparties de manière non uniforme sur la longueur du stator.

Ainsi, contrairement aux modèles précédents, nous estimons chaque zone en nous référant aux détails de conception pour calculer son volume. Les masses volumiques sont ensuite estimées et équilibrées zone par zone.

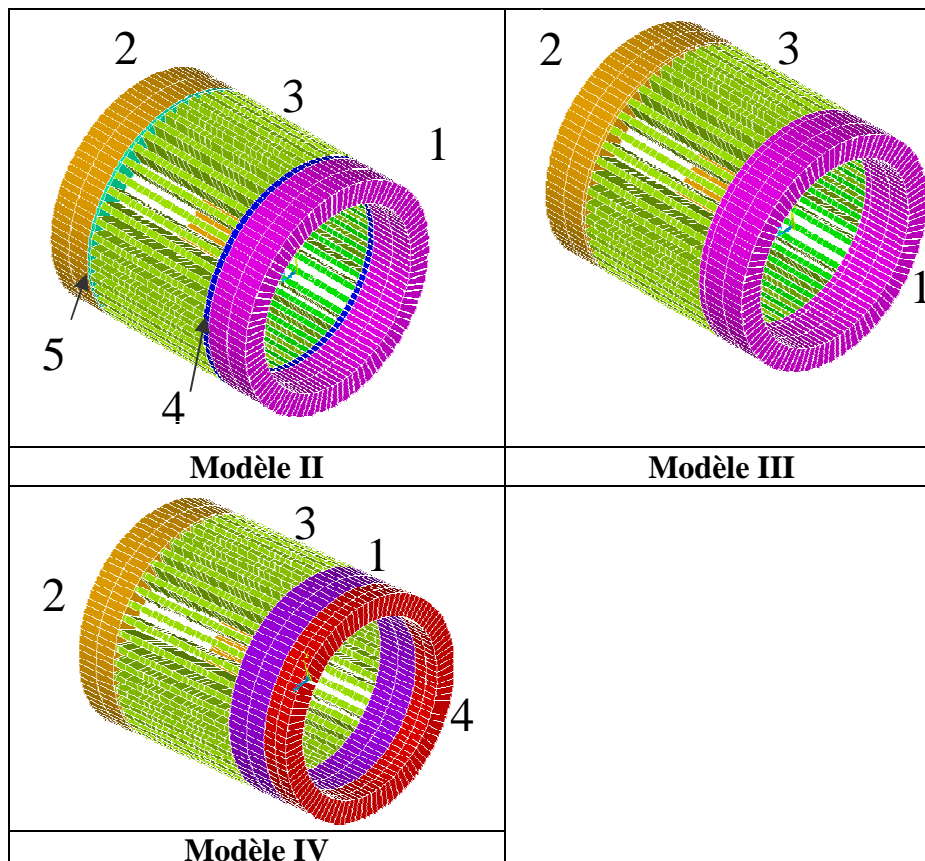
Toutefois, nous soulignons la difficulté d'estimer les densités des têtes de bobines indépendamment du reste du bobinage, principalement parce que celles-ci sont représentées par des cylindres homogènes ; or en réalité elles sont tressées, leur distribution de masses est plus complexe et leur pesée n'est pas aisée. Ceci introduit de fait une incertitude importante sur la matrice de masse du modèle éléments finis. La valeur constructeur de la masse du cercle de phase (partie 4) est intégrée dans la masse totale.

Nous remarquons cette fois ci, suite à la prise en compte du cercle de phase, que la répartition des masses est très différente de celle calculée dans les modèles II et III.

Les tableaux Tab III.9 et Tab III.10 résument respectivement les propriétés matérielles des 4 modèles et les représentations géométriques des modèles de bobinage II, III et IV.

	Identifiant sous ensemble	Ex (MPa) $\times 10^3$	Ey = Ez (MPa) $\times 10^3$	ν_{ij}	Gxy = Gxz (MPa) $\times 10^3$	Gyz (MPa) $\times 10^3$	Densité (kg.m ⁻³) $\times 10^3$
Modèle I	1 (monobloc)	124	-	0.35	45	-	5.50
Modèle II	1	10	-	0.35	4	-	5.50
	2	10	-	0.35	4	-	5.50
	3	1	-	0.35	0.4	-	5.50
	4	1	-	0.45	0.4	-	5.50
	5	1	-	0.45	0.4	-	5.50
Modèle III	1	5	5	0	2	2	5.50
	2	3	3	0	1	1	5.50
	3	5	5	0	1	1	5.50
Modèle IV	1	1.5	1.5	0	0.3	0.4	3.90
	2	1.5	1.5	0	0.3	0.4	3.90
	3	87	3.27	0	26	1.125	6.85
	4	1.5	1.5	0	0.15	0.15	1.70

Tab III. 9: Définition des matériaux des modèles I, II, III et IV



Tab III. 10: Représentations géométriques des modèles II, III et IV

III.3.2.2.2. Discussion sur la représentativité des 4 modélisations proposées

Nous présentons les résultats des corrélations mesure-calcul à partir des modèles précédents.

- **Corrélations des déformées modales**

- **Modèle I :**

Le modèle I ne peut prédire que 2 modes expérimentaux. Leurs MAC sont de l'ordre de 70%. Il est évident que ce modèle n'est pas prédictif pour décrire correctement le comportement dynamique dans la bande fréquentielle d'intérêt.

- **Modèle II, III et IV** (Fig III.36, Fig III.37 et Fig III.38) :

Les déformées modales des modèles II, III et IV ont une meilleure corrélation avec les mesures que celles du modèle I. En effet, les 5 premiers modes mesurés sont appariés avec des valeurs de MAC supérieures à 84%. Ces modèles sont prédictifs des déformées modales avec une précision équivalente.

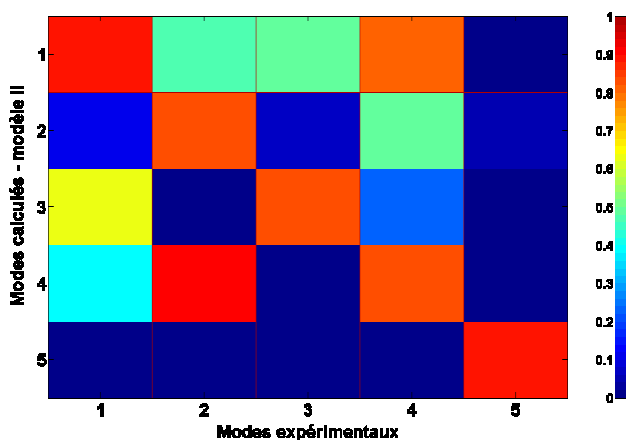


Fig III. 37: Corrélation des déformées mesure-modèle II

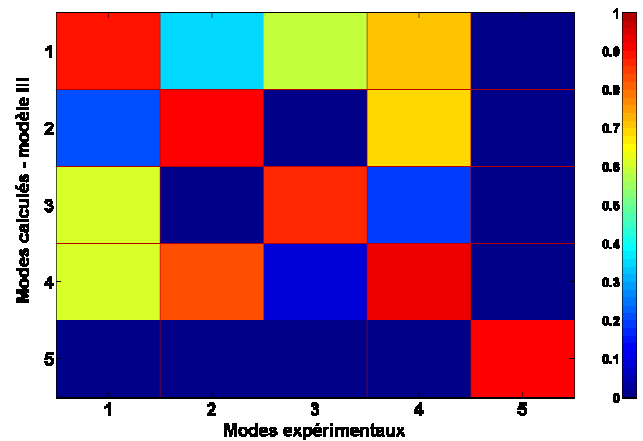


Fig III. 36: Corrélation des déformées mesure-modèle III

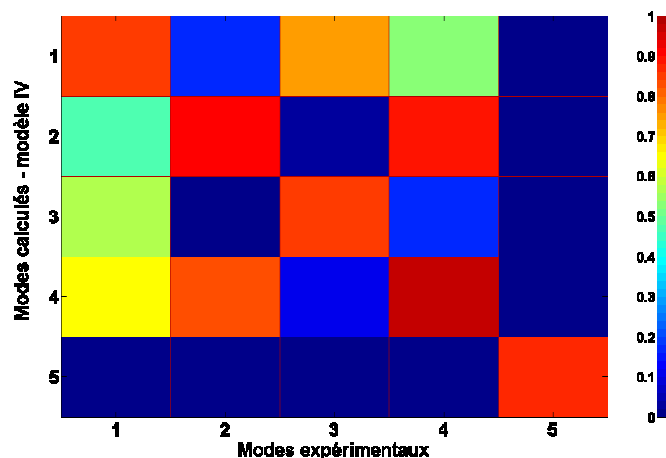


Fig III. 38: Corrélation des déformées mesure-modèle IV

• **Corrélations des fréquences propres**

A l'exception du modèle I où l'appariage mesure-calcul n'est pas satisfaisant, les modèles II, III et IV présentent de bonnes valeurs des MAC pour les 5 premiers modes. La seule différence entre ces 3 modèles réside dans les écarts fréquentiels relatifs.

N° mode expérimental	Fréquence Hz	Fréquence Hz	Ecart (%)
1	446.8	705.9	58.0
5	911.0	792.5	-13.0

Tab III. 11: Corrélation fréquentielle : Mesure - Modèle I

N° mode expérimental	Fréquence Hz	Fréquence Hz	Ecart (%)
1	446.8	560.5	25.4
2	572.6	1067.6	86.4
3	676.6	1195.6	31.2
4	785.1	641.7	-43.7
5	911.1	1326.6	45.6

Tab III. 12: Corrélation fréquentielle : Mesure - Modèle II

N° mode expérimental	Fréquence Hz	Fréquence Hz	Ecart (%)
1	446.8	504.5	12.9
2	572.6	592.4	3.4
3	676.6	816.8	20.7
4	785.1	1052.7	34.1
5	911.1	1146.9	25.9

Tab III. 13: Corrélation fréquentielle : Mesure - Modèle III

N° mode expérimental	Fréquence Hz	Fréquence Hz	Ecart (%)
1	446.8	449.4	0.6
2	572.6	559.7	-2.3
3	676.6	682.5	0.9
4	785.1	766.7	-2.3
5	911.1	959.6	5.3

Tab III. 14: Corrélation fréquentielle : Mesure - Modèle IV

Le modèle IV présente la meilleure corrélation mesure-calcul. Sa précision de prédiction fréquentielle est comprise entre -2.3% et 5.3%. Les MAC sont supérieurs à 84 %.

En comparaison avec le modèle III, nous en déduisons que la prise en compte du cercle de phase dans le modèle du bobinage permet d'affiner la corrélation mesure-calcul.

• Bilan des corrélations mesure - calcul

Nous établissons le bilan des corrélations mesure-calcul des 4 modèles proposés à travers les figures Fig III.39 et Fig III.40 et nous obtenons les résultats suivants :

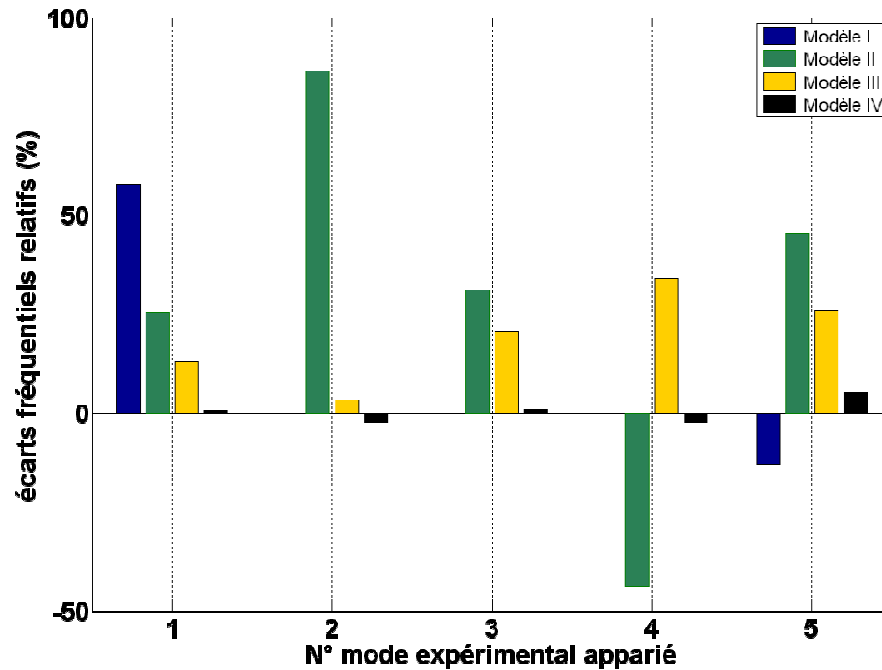


Fig III. 39: Ecarts fréquentiels relatifs des 4 modèles de bobinage

- L'introduction du bobinage dans le stator nu diminue de façon notable les fréquences propres et modifie les déformées modales. Elle apporte également des amortissements importants conduisant à la baisse du niveau des FRF, en particulier pour des modes élevés.
- 4 modèles ont été modélisés avec une complexité croissante. Ils ont été examinés avec la confrontation mesure-calcul.
- La modélisation simplifiée monobloc (modèle I) ne peut révéler plus de 2 modes globaux et par conséquent ne peut être en aucun cas exploité dans la suite.
- Seule la modélisation multi-blocs utilisant des matériaux orthotropes peut prédire les 5 premiers modes globaux de la structure.
- Le modèle IV, le plus respectueux de la géométrie réelle et prenant en compte celle du cercle de phase, donne la meilleure corrélation mesure-calcul. Les écarts fréquentiels relatifs sont compris entre -2.3% et 5.3%. Les MAC sont supérieurs à 84%.

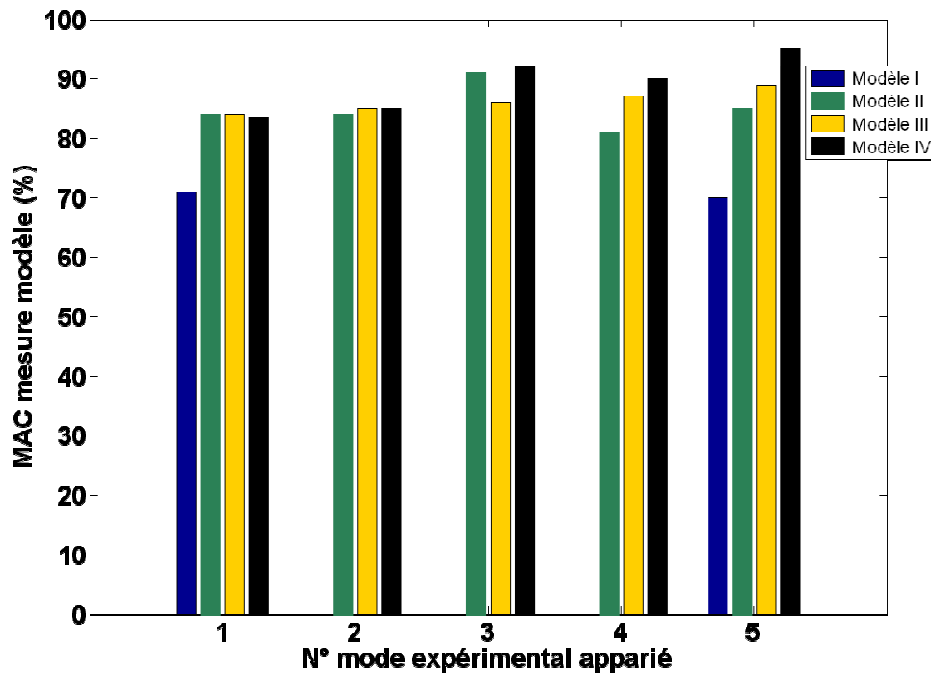


Fig III. 40: MAC mesures- calculs des 4 modèles de bobinage

- Nous remarquons que les extrémités du bobinage dans modèle le plus représentatif, à savoir le modèle IV, ont des raideurs très faibles. Ces raideurs correspondent à des propriétés matériaux très voisines de celles du tissu isolant, reliant les têtes de bobines entre elles. Bien que ces raideurs soient très faibles par rapport à celle du reste du bobinage et du stator nu, nous ne pouvons pas pour autant les remplacer par de simples masses ponctuelles réparties uniformément sur les extrémités du stator (Fig III.41). Un tel modèle, ne peut prédire qu'un seul mode expérimental radial pur, avec un MAC de 71% et un écart fréquentiel de 34%. Les extrémités du bobinage participent donc également par leur rigidité au comportement dynamique global du stator.

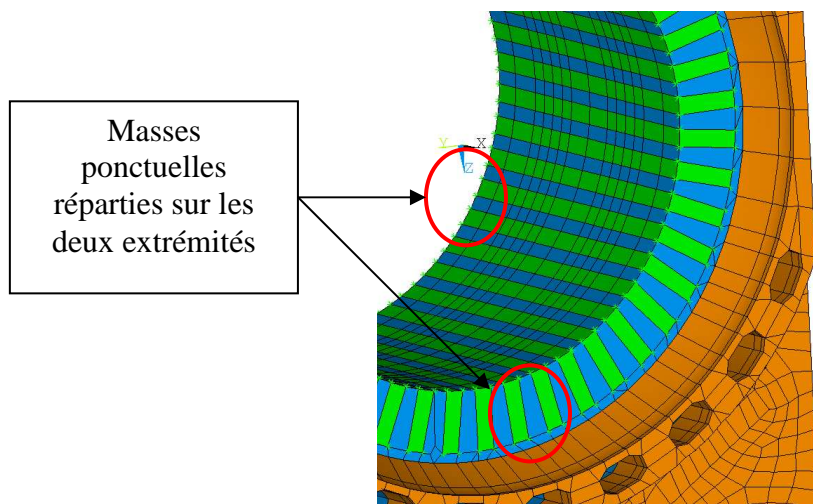


Fig III. 41: Têtes de bobines et cercles de phases modélisés par des masses réparties

Après avoir introduit et discuté des hypothèses de modélisation pour construire successivement les modèles du stator nu et du bobinage, nous retenons au final celles qui assurent un modèle représentatif du comportement dynamique global du stator bobiné. Afin d'être ajusté et validé par une procédure de recalage, nous nous sommes donc assurés, par voie directe, de construire un modèle nominal dont le comportement est « proche » de la structure réelle.

Avec ses hypothèses, le modèle IV conduit à une prédiction très satisfaisante sur les 5 premiers modes. Néanmoins et afin d'affiner davantage ses résultats et surtout de valider ses hypothèses de modélisation, nous procédons à un recalage par méthode de sensibilité dans la suite de cette étude.

III.3.3. Identification des paramètres matériaux du modèle

III.3.3.1. Etude a priori de sensibilité des paramètres

L'objectif de cette analyse est de sélectionner dans le modèle les paramètres pertinents pour le recalage. Ils doivent présenter une influence importante sur celui-ci conduisant à une variabilité significative sur les fréquences et vecteurs propres.

- **Etude de sensibilité par simulations Monte Carlo**

Afin de quantifier l'impact des perturbations des paramètres (entrées) du modèle initial construit précédemment, sur ses solutions propres (sorties), nous procédons par simulation de Monte Carlo. Cette méthode consiste à générer des tirages aléatoires sur des intervalles de variations des paramètres dans le but d'effectuer une étude statistique des corrélations entre celles-ci et les sorties. Sa mise en œuvre est assez aisée et peut s'appliquer à toutes les lois de probabilités simulant les variations sur les paramètres. Le nombre de tirages aléatoires doit être suffisant pour assurer une certaine confiance dans le résultat calculé. Le coût de calcul devient prohibitif dès lors qu'il s'agit de structures complexes, cependant cette méthode reste l'unique référence. Nous aurons l'occasion de revenir plus dans le détail sur cette méthode, notamment sur sa convergence et son amélioration dans le chapitre IV.

Nous nous intéressons dans cette étude à la variabilité des écarts relatifs sur les fréquences propres et les vecteurs propres avec un nombre de tirages de l'ordre de 10^4 .

Dans ce travail, nous choisissons de considérer les critères d'entrée et de sorties suivants :

- **critères d'entrée** : Les plages de variations des paramètres;

- **critères de sortie** : Les valeurs des MAC et des écarts fréquentiels relatifs entre les solutions propres nominales, considérée comme référence, et les valeurs perturbées. Ces critères sont donc initialisés respectivement à 1 pour les MAC et à 0 pour les écarts fréquentiels.

Les valeurs des MAC et des écarts fréquentiels sont définies de la manière suivante :

- **MAC** : Comme nous l'avons vu précédemment (page 65), ce critère quantifie le niveau de corrélation entre les déformées modales calculées, pour chaque configuration de paramètres générée à chaque tirage, et les déformées initiales. Ses valeurs sont comprises dans $[0 ; 1]$. Pour un tirage donné, un MAC faible traduit une forte variation de la déformée calculée par rapport à la valeur initiale autrement dit, la variation correspondante des paramètres d'entrée a

un fort impact sur le modèle. Un MAC proche de 1 traduit un faible impact de la variation de l'entrée sur la déformée modale.

- **Ecart fréquentiel relatif (%)** : Quantifie la variation relative d'une fréquence propre calculée à chaque tirage ($f_{courante}$) par rapport à sa valeur nominale ($f_{nominale}$) :

$$\frac{\Delta f}{f} = 100 \times \frac{f_{courante} - f_{nominale}}{f_{nominale}}.$$

Ces critères permettent d'identifier la sensibilité des modes vis-à-vis des variations des paramètres. Cette analyse est menée de la manière suivante:

- La moyenne des critères de sortie doit osciller autour de zéro la valeur nominale.
- Pour un mode donné, si les valeurs des critères de sortie sont situées dans un intervalle assez large, il y a de fortes chances de trouver les paramètres minimisant ces écarts et le mode est dans ce cas, le mode est considéré comme sensible. Dans le cas contraire ce mode est dit insensible aux variations des paramètres.

Dans le cas où les valeurs des critères de sortie varient dans un intervalle très large, le mode en question devient hypersensible par rapport aux variations des paramètres.

- Afin d'identifier les paramètres influents permettant de faire varier les critères de sortie, nous avons calculé des coefficients de corrélation « r ». Ces derniers représentent la sensibilité des paramètres d'entrée vis-à-vis des critères de sortie à travers l'équation suivante :

$$r = \frac{\sum_{i=1}^h (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^h (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^h (y_i - \bar{y})^2}}$$

\bar{x} et x_i sont respectivement les variations moyenne et courante d'un paramètre au $i^{ème}$ tirage.

\bar{y} et y_i sont respectivement les valeurs moyenne et courante d'un critère de sortie au le $i^{ème}$ tirage aléatoire.

Plus la valeur de r est grande, plus un mode est dit sensible vis-à-vis d'un paramètre.

III.3.3.1.1. Sur le stator nu

- **Paramétrage du modèle**

Après une première étape de paramétrage du modèle du stator nu, les paramètres décrits dans le tableau Tab III.15 ont été choisis.

Ces paramètres sont initialisés aux valeurs calculées par la méthode directe (méthode d'homogénéisation). Les coefficients de Poisson sont initialisés quant à eux à 0.1 correspondant à un couplage faible dans les axes.

PID	Description
1	Module de Young dans le plan de l'empilement feuilleté (E{section})
2	Module de Young transversal empilement de tôles ($E{\text{transverse}}$)
3	Module de Young des plateaux de serrage (E{plateaux})
4	Module de Young des barreaux (E{barreaux})
5	Coefficient de cisaillement dans le plan transversal aux tôles (xy) ($G{\text{transverse}_1}$)
6	Coefficient de cisaillement dans le plan transversal aux tôles (xz) ($G{\text{transverse}_2}$)
7	Coefficient de Poisson dans le sens transverse aux tôles ($\nu{\text{transverse}}$)
8	Coefficient de cisaillement dans le plan des tôles (G{section})
9	Coefficient de Poisson dans le plan des tôles (ν{section})

Tab III. 15: Paramétrage du modèle du stator nu

• Sensibilité des fréquences propres vis-à-vis des paramètres

Les variations aléatoires ont été effectuées simultanément avec une loi de probabilité uniforme sur tous les paramètres dans une plage de [-15%, 15%]. Le nombre de tirages aléatoires choisi est de 10^4 , ce qui conduit à 10^4 calculs de modes propres d'un modèle de plus de 115000 ddls.

Les figures Fig III.42 et Fig III.43 illustrent les variations absolues et relatives des fréquences propres des dix premiers modes. On constate que :

- D'une manière générale, les variations absolues des fréquences propres augmentent au fur et à mesure que l'ordre des modes augmente.
- Sur les 10 premiers modes, la plage de variation est globalement de [-7%, 7%]. Comparée aux variations des paramètres d'entrée [-15%, 15%]. Par conséquent, nous pouvons constater que ces modes ont une sensibilité moyenne vis-à-vis de ces paramètres.

• Sensibilité des vecteurs propres vis-à-vis des paramètres

La figure Fig III.44 illustre les variations des critères de MAC sur les 10 premiers modes au cours des tirages aléatoires. On constate que :

- Les 5 premiers modes présentent des variations de MAC très faibles. Ils restent quasiment insensibles aux variations des paramètres.
- Les 5 modes suivants (torsion, mode local du plateau de serrage axial ou mode complexe) sont beaucoup plus sensibles. Cette sensibilité donne la possibilité d'apparier ces modes dans le processus de recalage.

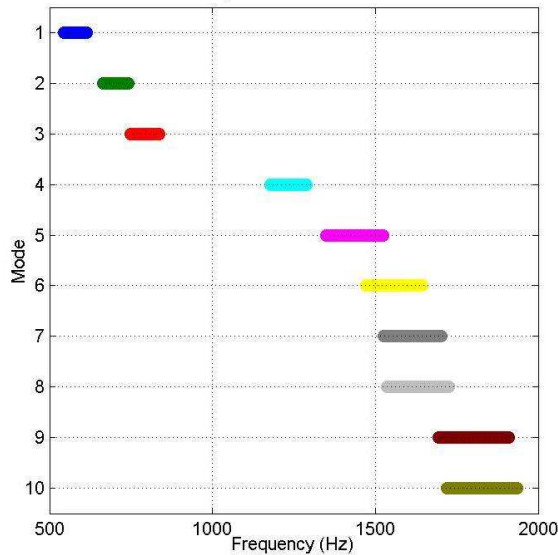


Fig III. 42: Plage de variations absolues des fréquences propres

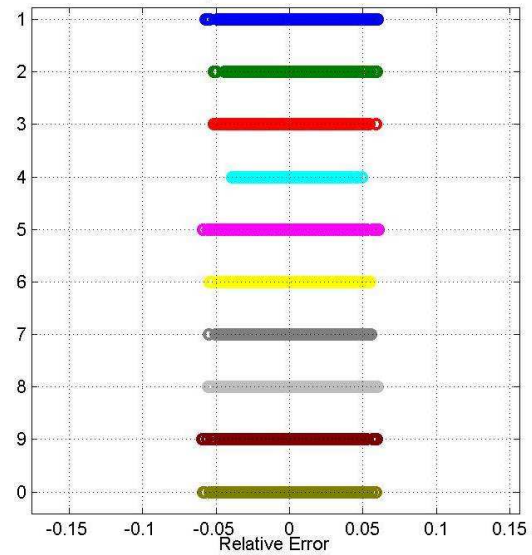


Fig III. 43: Plage de variations des écarts fréquentiels relatifs

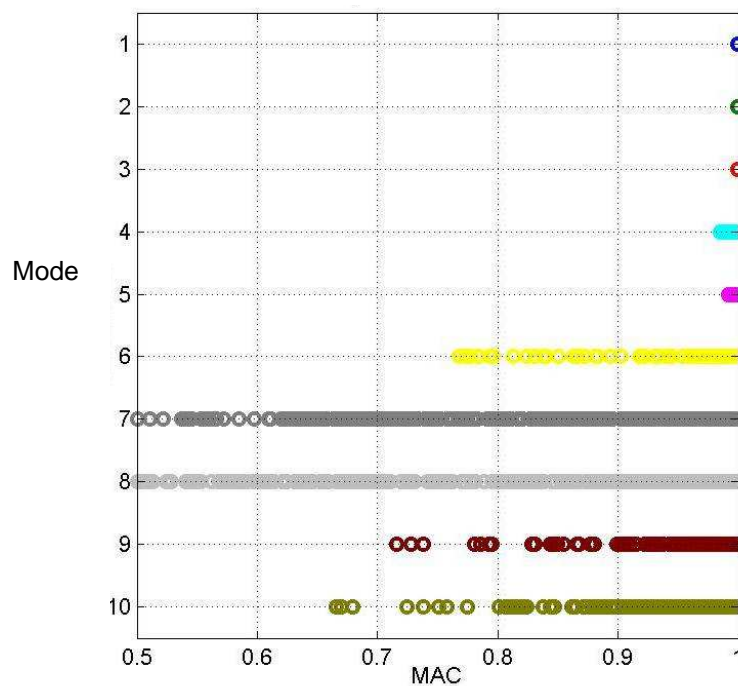


Fig III. 44: MAC des dix premiers modes

• Détermination des paramètres influents

i – **Sur les écarts fréquentiels relatifs** : Le tracé du coefficient de corrélation présente qualitativement la participation de chaque paramètre dans l'écart fréquentiel relatif calculé à chaque tirage. On constate dans la figure Fig III.45 que les paramètres $E_{section_1}$, $G_{transverse_1}$, $G_{transverse_2}$ ainsi que $G_{section_8}$ sont influents sur les écarts fréquentiels relatifs.

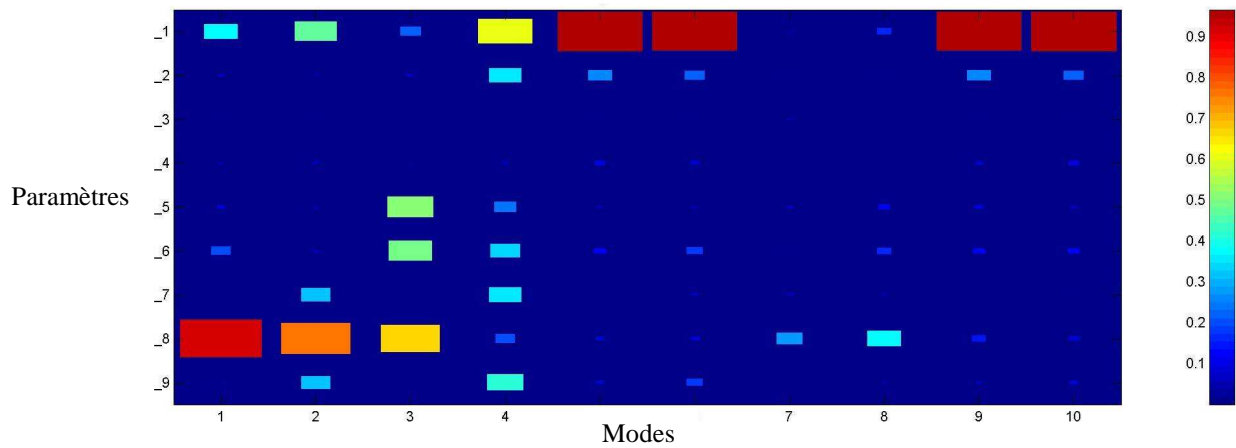


Fig III. 45: Coefficients de corrélation : paramètres - écarts fréquentiels relatifs

ii – **Sur les critères de MAC** : La figure Fig III.46 représentant les variations des déformées modales (MAC), illustre la même tendance que celle observée dans le cas du critère sur les écarts fréquentiels.

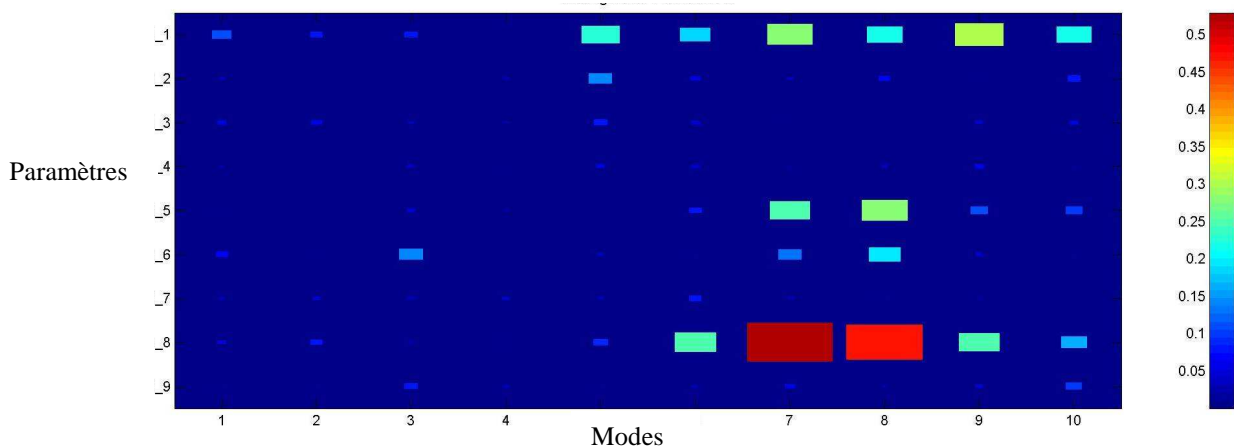


Fig III. 46: Coefficients de corrélation : paramètres - MAC

• Bilan

En tenant compte des résultats précédents, nous pouvons conclure que :

- Les paramètres influents sont le module de Young de l'empilement de tôles, transverse aux feuilles E_{section} , ainsi que les coefficients de cisaillement transverse $G_{\text{transverse}_{(1 \text{ et } 2)}}$ et de section G_{section} , qui sont uniquement des paramètres de l'empilement feuilleté.
- Ces remarques confirment la forte influence de l'empilement feuilleté sur le comportement du stator et la faible influence de son module de Young transverse. Ce dernier sera donc initialisé à sa valeur nominale déterminée par voie directe (mesure ultrasons et homogénéisation) et fixé à cette valeur lors de la procédure de recalage. Il en sera de même pour les autres paramètres non influents.

III.3.3.1.2. Sur le stator bobiné

- **Paramétrage du modèle**

Dans cette partie, l'étude de sensibilité est réalisée uniquement sur les paramètres du bobinage. Ils sont listés dans le tableau Tab III.16. Nous avons au total 24 paramètres de raideur répartis sur les 4 zones orthotropes du bobinage.

- **Zone à énergie de déformation importante**

Rappelons que dans le modèle IV nous avons apparié 5 modes mesurés. Nous pouvons donc analyser la répartition des énergies de déformation associées à ces modes. Nous pouvons constater que les énergies sont essentiellement concentrées dans les zones extrémités du bobinage. Les écarts mesure-calcul sont donc probablement dus aux défauts d'estimation des paramètres dans ces zones là.

PID	Zone	Description
_1	3	Module de Young dans le plan des feuilles de cuivre
_2		Module de Young transversal aux feuilles de cuivre (plan (xy))
_3		Module de Young transversal aux feuilles de cuivre (plan (xz))
_4		Coefficient de cisaillement dans le plan (xy)
_5		Coefficient de cisaillement dans le plan (yz)
_6		Coefficient de cisaillement dans le plan (xz)
_7	1	Module de Young direction X
_8		Module de Young direction Y
_9		Module de Young direction Z
_10		Coefficient de cisaillement dans le plan (xy)
_11		Coefficient de cisaillement dans le plan (yz)
_12		Coefficient de cisaillement dans le plan (xz)
_13	2	Module de Young direction X
_14		Module de Young direction Y
_15		Module de Young direction Z
_16		Coefficient de cisaillement dans le plan (xy)
_17		Coefficient de cisaillement dans le plan (yz)
_18		Coefficient de cisaillement dans le plan (xz)
_19	4	Module de Young direction X
_20		Module de Young direction Y
_21		Module de Young direction Z
_22		Coefficient de cisaillement dans le plan (xy)
_23		Coefficient de cisaillement dans le plan (yz)
_24		Coefficient de cisaillement dans le plan (xz)

Tab III. 16: Définition des paramètres dans les 4 zones du bobinage

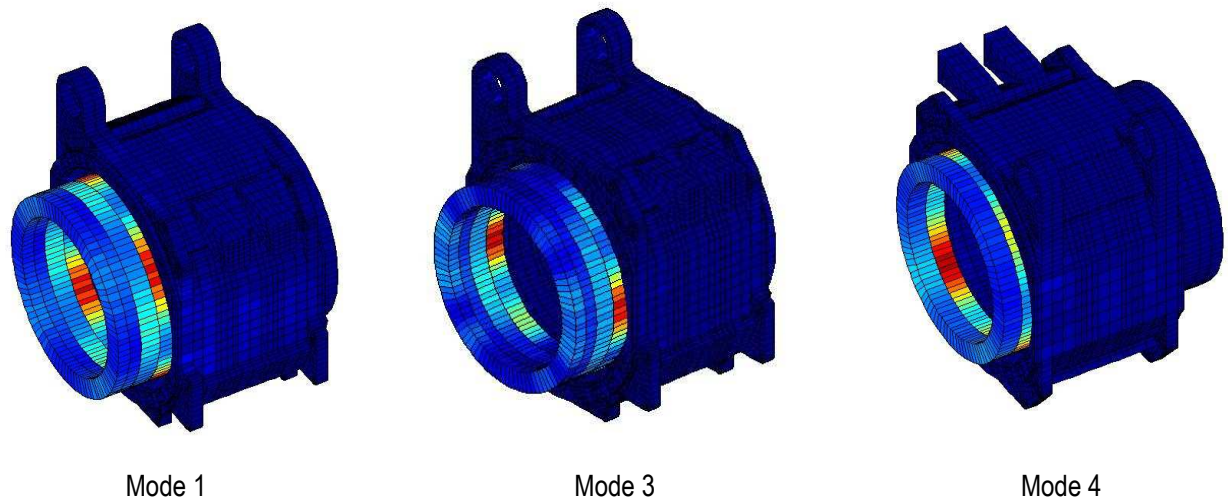


Fig III. 47: Energies de déformation élément par élément

- **Sensibilité du modèle par rapport aux paramètres du bobinage**

Nous introduisons une distribution uniforme des paramètres du bobinage dans un intervalle de $[-10\%, +10\%]$ autour de leurs valeurs nominales. Le nombre de tirages aléatoires réalisé est égal à 3000. A l'instar de l'étude de sensibilité sur le stator nu, nous étudions les coefficients de corrélation entre les entrées et les sorties du modèle.

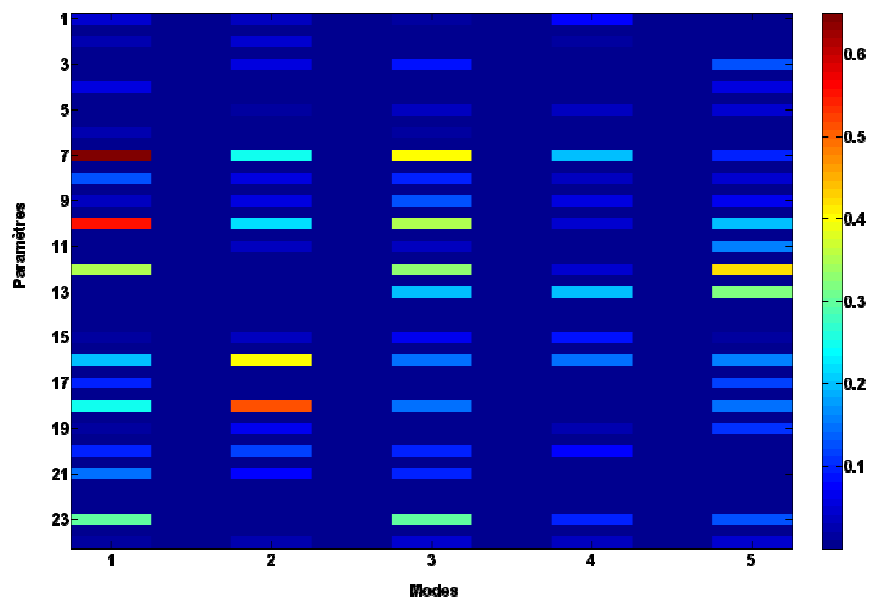


Fig III. 48: Sensibilité des évolutions des vecteurs propres par rapport aux paramètres

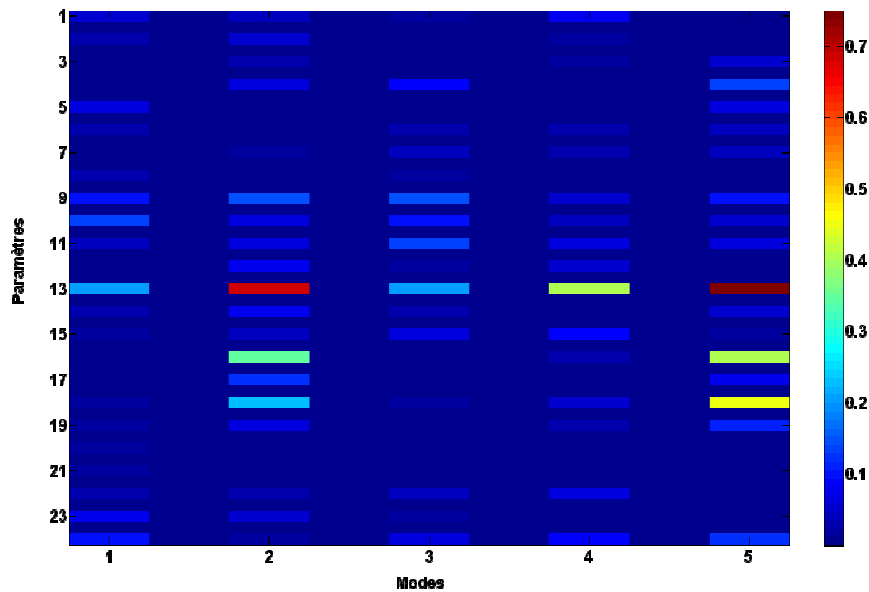


Fig III. 49: Sensibilité des évolutions des fréquences par rapport aux paramètres

Comme dans l'étude sur le stator nu, Le tracé du coefficient de corrélation par rapport à chaque paramètre est tracé. On constate dans la figure Fig III.49 que les paramètres (13), (16), (18) ainsi que (23) présentent les plus forts coefficients de corrélation avec la variation des écarts fréquentiels relatifs.

D'après la figure Fig III.48, ce sont les paramètres (7), (10), (12), (13), (16) et (18) qui présentent le plus fort coefficient de corrélation avec les évolutions des MAC.

Comme prévue par l'étude des énergies de déformation, le modèle du stator bobiné a très peu d'influence sur les paramètres (1) à (6) relatifs à la zone (3) insérée du bobinage.

• Bilan

En tenant compte des résultats obtenus, nous pouvons conclure que :

- Parmi les 4 zones définies dans le bobinage, les paramètres de la zone insérée dans les encoches de l'empilement feuilleté ont le plus faible effet sur les variations des sorties du modèle. Ils seront donc fixés à leurs valeurs nominales lors du recalage.
- Les coefficients de corrélation calculés entre les entrées et les sorties du modèle indiquent que 7 paramètres seulement sur 24 sont influents. Il s'agit de paramètres liés à des phénomènes localisés aux extrémités du bobinage mais qui présentent une forte influence sur le comportement global du modèle.

III.3.3.2. Recalage de modèle par méthode de sensibilité

La problématique de recalage concerne la correction des erreurs dominantes de modélisation qui sont responsables des écarts calcul-mesure. A la différence de l'étape d'analyse de sensibilité, le recalage tente de corriger des zones influentes et erronées du modèle à partir de l'observation du comportement dynamique de la structure mesurée.

Par principe, avant d'avancer vers le recalage, une localisation des défauts dominants de modélisation s'impose *a priori*. Elle comporte :

- Un examen des différentes phases de modélisation avec les problèmes rencontrés (simplifications des géométries des composants, informations sur les matériaux et propriétés manquantes lors de la modélisation,...etc) afin de dresser une liste *a priori* de paramètres méconnus.
- Un examen détaillé du prototype et du montage expérimental pour détecter les différences grossières de géométrie, de connectivité, de présence ou absence d'équipement, etc.
- Localisation des défauts dominants de modélisation par des outils numériques.

Dans le cadre de cette étude, nous avons effectué les deux premières phases de localisation et avons conclu que les défauts sont présents essentiellement dans la modélisation du matériau orthotrope de l'empilement feuilleté. Nous abordons directement dans cette partie la procédure de recalage.

Le détail de la méthode est présenté dans le chapitre II. Son principe consiste à exprimer les distances des solutions propres (valeurs propres et vecteurs propres) en fonction des variations de paramètres. Pour cela, nous effectuons un développement en série de Taylor au premier ordre, au voisinage des solutions propres du modèle. Nous avons les relations suivantes :

$$\begin{bmatrix} \Delta\lambda \\ \Delta y \end{bmatrix} = S \Delta p \quad (III.1)$$

avec :

$$\lambda_v^{(m)} - \lambda_v^{(a)} = \sum_{i=1}^p \frac{\partial \lambda_v^{(a)}}{\partial p_i} dp_i + \sum_{i=1}^q \frac{\partial \lambda_v^{(a)}}{\partial q_i} dq_i \quad (\text{Valeurs propres}) \quad (III.2)$$

$$y_v^{(m)} - y_v^{(a)} = \sum_{i=1}^p \frac{\partial y_v^{(a)}}{\partial p_i} dp_i + \sum_{i=1}^q \frac{\partial y_v^{(a)}}{\partial q_i} dq_i \quad (\text{Vecteurs propres}) \quad (III.3)$$

$\lambda_v^{(m)}, y_v^{(m)}$ représentent respectivement la valeur propre et le vecteur propre du $v^{\text{ème}}$ mode mesuré et $\lambda_v^{(a)}, y_v^{(a)}$ la valeur propre et le vecteur propre du modèle éléments finis.

Les scalaires dp_i et dq_i représentent les variations des paramètres p (pour les paramètres de raideur) et q (pour les paramètres de masse), regroupés dans les vecteurs Δp et Δq :

$$\Delta p = \begin{Bmatrix} \vdots \\ dp_i \\ \vdots \end{Bmatrix} ; \Delta q = \begin{Bmatrix} \vdots \\ dq_i \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta P = \begin{Bmatrix} \Delta p \\ \Delta q \end{Bmatrix} \quad (III.4)$$

A chaque itération, on calcule la variation des paramètres Δp et Δq . L'ensemble des itérations nous permet d'obtenir les paramètres p et q :

$$p = p_0 + \sum \Delta p \quad \text{et} \quad q = q_0 + \sum \Delta q \quad (III.5)$$

Les dérivées premières des valeurs propres $\frac{\partial \lambda_v^{(a)}}{\partial p_i}, \frac{\partial \lambda_v^{(a)}}{\partial q_i}$ et des vecteurs propres

$\frac{\partial y_v^{(a)}}{\partial p_i}, \frac{\partial y_v^{(a)}}{\partial q_i}$ sont estimées par la méthode des différences finies. Pour chaque itération et pour

chaque dérivée, nous devons réactualiser le modèle et recalculer les solutions propres. A titre d'exemple, pour 10 itérations et 10 paramètres, nous devons calculer 100 fois les solutions propres, ce qui peut conduire à un temps de calcul important.

III.3.3.2.1. Sur le stator nu

- **Paramètres du matériau orthotrope de l'empilement feuilleté**

Nous considérons que l'empilement de tôles de tôles est homogène orthotrope et qu'il est constitué de 9 paramètres physiques : 3 modules de Young, 3 coefficients de cisaillement et 3 coefficients de Poisson.

Module de Young	E_x, E_y, E_z
Coefficient de Poisson	$\nu_{xy}, \nu_{xz}, \nu_{yz}$
Module de cisaillement	G_{xy}, G_{yz}, G_{zx}

Ce type de matériau est défini dans NASTRAN par MAT9 et sous le format de la matrice des coefficients élastiques $[C]$ (matrice 6×6 , symétrique, définie positive) où :

$$[C]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{xy}/E_x & -\nu_{xz}/E_x & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{yx}/E_y & 1/E_y & -\nu_{yz}/E_y & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{zx}/E_z & -\nu_{zy}/E_z & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{xz} \end{bmatrix} \quad (III.6)$$

dans le cas d'un matériau orthotrope.

et : $\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$ avec : $\{\sigma\}$ et $\{\varepsilon\}$ sont respectivement les tenseurs de contraintes et de déformation du système.

E_i , ν_i et G_i (donnés avec des indices pour préciser les directions) sont respectivement le module de Young, le coefficient de Poisson et le module de cisaillement. La matrice $[C]^{-1}$ est supposée symétrique sous la condition :

$$\frac{\nu_{zx}}{E_z} = \frac{\nu_{xz}}{E_x} \quad \frac{\nu_{yx}}{E_y} = \frac{\nu_{xy}}{E_x} \quad \frac{\nu_{zy}}{E_z} = \frac{\nu_{yz}}{E_y} \quad (III.7)$$

$$h = 1 - (\nu_{xy})^2 \frac{E_y}{E_x} - (\nu_{yz})^2 \frac{E_z}{E_y} - (\nu_{xz})^2 \frac{E_z}{E_x} - 2\nu_{xy}\nu_{yz}\nu_{xz} \frac{E_z}{E_x} \quad (III.8)$$

avec : $h > 0$

La procédure de construction de la matrice des coefficients élastiques $[C]$ a été programmée sous MATLAB et permet ainsi d'être intégrée dans la procédure de recalage.

• **Recalage de modèle avec coefficients de Poisson nuls (cas 4)**

Après l'analyse de sensibilité du modèle, on s'intéresse à recalibrer les paramètres influents du matériau orthotrope du noyau feuilleté et présenter les résultats de recalage en fonction de différents choix des paramètres. Les variations des paramètres sont bornées dans $[0.1 ; 2]$ par rapport à leurs valeurs initiales. La variation maximale par itération est limitée à $\pm 10\%$. La minimisation de la sortie est effectuée sur tous les modes appariés avec 195 ddl capteurs.

Dans le cas où les coefficients de Poisson sont nuls ($\nu_{xy} = \nu_{xz} = \nu_{yz} = 0$), la matrice $[C]$ est diagonale, constituée des 6 paramètres physiques :

$$[C] = \begin{bmatrix} E_x & & & & & \\ & E_y & & & & \\ & & E_z & & & \\ & & & G_{xy} & & \\ & & & & G_{yz} & \\ & & & & & G_{xz} \end{bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

Après avoir effectué l'analyse de sensibilité, nous savons que le module de Young E_x n'est pas un paramètre sensible pour les 9 modes identifiés, et ne doit donc pas être pris en compte dans le recalage (l'estimation de ce paramètre est déterminée par une méthode directe). Il reste donc 5 paramètres à recalibrer : 2 modules de Young (E_y et E_z) et 3 coefficients de cisaillement (G_{xy} , G_{xz} et G_{yz}).

Bilan du recalage :

- Les variations des paramètres sont très importantes (+90% sur le paramètre G_{xy} et +30% sur le paramètre G_{yz}) (Tab III.17).
- Ce recalage indique que les valeurs corrigées des paramètres de même plan (E_y et E_z d'un côté et G_{xz} et G_{yz} d'un autre) sont nettement différentes l'une de l'autre. Ceci conforte notre hypothèse *a priori* de ne pas les contraindre à l'égalité lors de leur évolution. Par ailleurs, ceci indique qu'une modélisation homogène de l'empilement feuilleté n'est pas parfaite en raison notamment de la présence de contraintes résiduelle sur les soudures. Il a été montré par retour d'expérience que ces contraintes pouvaient être plus ou moins importantes et avoir une influence sur la raideur d'une zone de moteur plutôt qu'une autre. Ceci s'est traduit dans notre cas par un « déséquilibre des raideurs » dans les directions axiale et radiale.

Paramètres	Valeurs initiale (MPa)	Coefficient de variation après recalage
E_y	210000	0.70 (-30%)
E_z	210000	0.90 (-10%)
G_{yz}	75000	0.90 (-10%)
G_{xy}	9605	1.90 (+90%)
G_{xz}	9605	1.30 (+30%)

Tab III. 17: Variation des paramètres après recalage (cas d'homogénéisation 4)

- Par rapport aux MAC mesure-calculs avant recalage, nous observons une amélioration significative, en particulier pour les 4 derniers modes qui sont appariés dans l'ordre avec une moyenne de 90% (88% avant recalage) (Fig III.50, Tab III.18).
- Une diminution significative des erreurs sur les fréquences propres est obtenue.

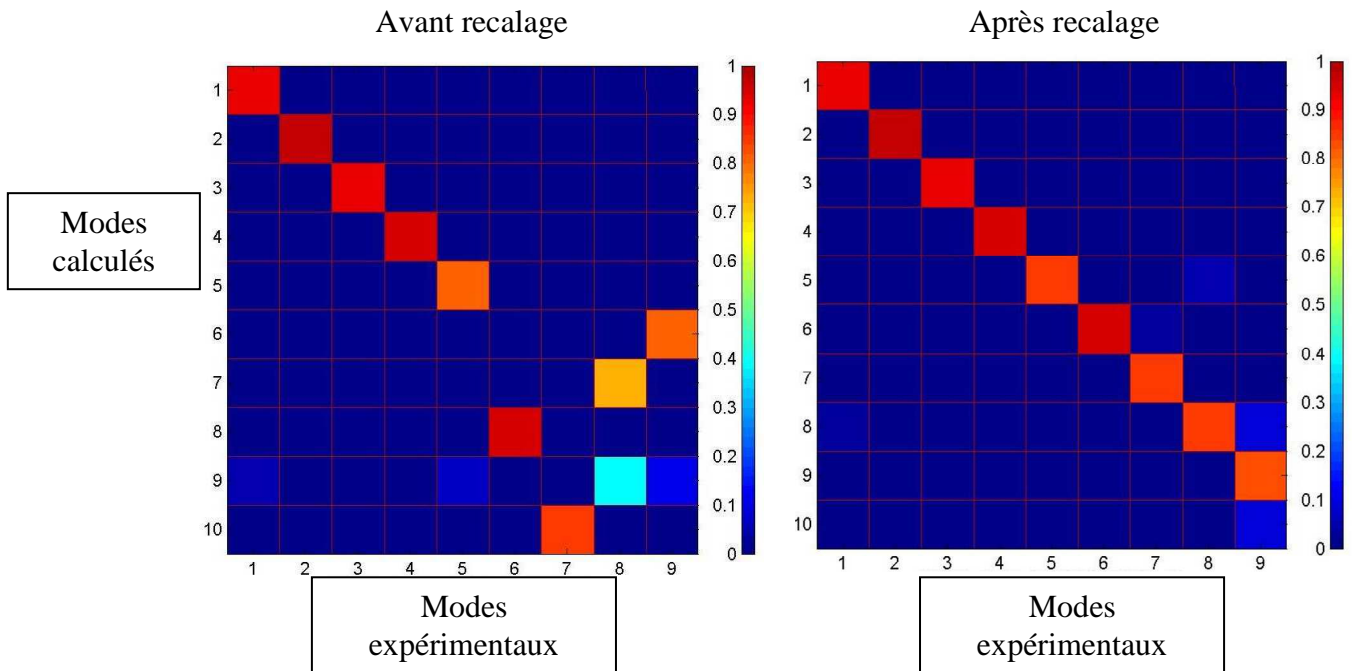


Fig III. 50: Matrices MAC avant et après recalage (cas d'homogénéisation 4)

- **Recalage de modèle avec coefficients de Poisson faibles (cas 2 et 3)**

a- Recalage avec 8 paramètres : E_y , E_z , G_{yz} , G_{xy} , G_{xz} , ν_{xy} , ν_{xz} , ν_{yz} (cas de l'homogénéisation 2)

Dans ce paragraphe, nous lançons une procédure de recalage avec un modèle où les coefficients de Poisson sont faibles mais non nuls. Ce modèle correspond au cas 2 de l'hypothèse d'homogénéisation de l'empilement feuilleté. Pour ce cas, les valeurs initiales des coefficients de Poisson sont faibles et valent 0.1 dans tous les plans (transversaux et dans le plan radial). Par rapport au cas précédent, nous nous retrouvons cette fois ci avec 8 paramètres.

N° mode mesure	Fréquence expérimentale (Hz)	N° mode calcul	Erreurs fréquentielles (%)		MAC (%)	
			Avant	Après	Avant	Après
#1	597.7	#1	-2.1	-0.3	92	93
#2	610.4	#2	8.3	0.8	97	97
#3	656.0	#3	6.5	1.6	93	93
#4	863.0	#4	-6.2	-2.1	94	94
#5	1522.5	#5	-4.2	2.7	82	84
#6	1596.5	#6	7.3	1.7	96	96
#7	1671.2	#7	7.0	0.8	86	86
#8	1772.3	#8	-2.7	0.5	91	92
#9	1832.9	#9	-12.7	1.9	81	85

Tab III. 18: Bilan des performances du recalage (cas de l'homogénéisation 4)

Bilan du recalage :

- A l'instar du cas de recalage précédent, les variations de paramètres après recalage peuvent être très importantes et atteindre +80% pour G_{xy} par exemple et -40% pour G_{yz} (Tab III.19).
- Une nette amélioration sur les valeurs des MAC et des écarts fréquentiels relatifs entre la mesure et le calcul est obtenue (Tab III.20). La performance du recalage est quasi identique à celle obtenue dans le cas de coefficients de Poisson nuls. Les valeurs des coefficients de Poisson restent faibles (inférieures à 0.1) après recalage.

Paramètres	Valeurs initiales (MPa)	Coefficient de variation après recalage
E_y	210000	0.80 (-20%)
E_z	210000	1.00 (0%)
G_{xy}	9605	1.80 (+80%)
G_{yz}	75000	0.60 (-40%)
G_{xz}	9605	1.40 (+40%)
ν_{xy}	0.1	0.70 (-30%)
ν_{yz}	0.1	1.00 (0%)
ν_{xz}	0.1	1.00 (0%)

Tab III. 19: Variation des paramètres après recalage (cas de l'homogénéisation 2)

N° mode mesure	Fréquence expérimentale (Hz)	N° mode calcul	Erreurs fréquentielles (%)		MAC (%)	
			Avant	Après	Avant	Après
#1	597.7	#1	-2.7	-0.65	92	93
#2	610.4	#2	9.2	4.01	97	97
#3	656.0	#3	9.1	1.05	93	93
#4	863.0	#4	-5.7	-1.62	94	94
#5	1522.5	#5	-8.9	4.4	82	84
#6	1596.5	#6	-7.5	2.2	96	96
#7	1671.2	#7	7.7	0.9	86	86
#8	1772.3	#8	-5.9	0.5	81	80
#9	1832.9	#9	-3.0	0.7	81	80

Tab III. 20: Bilan des performances du recalage (cas de l'homogénéisation 2)

b- Recalage avec 8 paramètres : E_y , E_z , G_{yz} , G_{xy} , G_{xz} , ν_{xy} , ν_{xz} , ν_{yz} (cas de l'homogénéisation 3)

Dans ce paragraphe, nous lançons cette fois ci une procédure de recalage par sensibilité à partir du modèle initial correspondant au cas d'homogénéisation 3. Les valeurs initiales des coefficients de Poisson sont faibles dans les plans transversaux et valent 0.1. La valeur est de 0.294 dans le plan radial.

Bilan du recalage :

- Concernant l'évolution des paramètres après recalage (Tab III.21), nous notons globalement les mêmes tendances de dévolution par rapport aux cas précédents (Tab III.19). Notons néanmoins que le coefficient de Poisson dans le plan radial (plus élevé dans ce cas par rapport aux cas 2 précédents), tend à baisser (-20%).
- Une légère différence de performances par rapport aux deux cas précédents est observée pour ce cas. En effet ; les modes 8 et 9 ont été prédits dans le désordre. Mais nous obtenons globalement une amélioration satisfaisante des critères de sortie (la moyenne des écarts fréquents relatifs passe de 8.1% à 2.1% et celle des MAC de 86% à 90%) (Tab III.22). Cette précision est quasi équivalente aux deux cas précédents (avec coefficients de Poisson nuls et faibles dans toutes les directions).

Paramètres	Valeurs initiales (MPa)	Coefficient de variation après recalage
E_y	210000	0.80 (-20%)
E_z	210000	0.80 (-20%)
G_{xy}	9605	1.40 (+40%)
G_{yz}	75000	0.60 (-40%)
G_{xz}	9605	1.40 (+40%)
ν_{xy}	0.1	1.30 (+30%)
ν_{yz}	0.294	0.80 (-20%)
ν_{xz}	0.1	1.30 (+30%)

Tab III. 21: Variation des paramètres après recalage (cas d'homogénéisation 3)

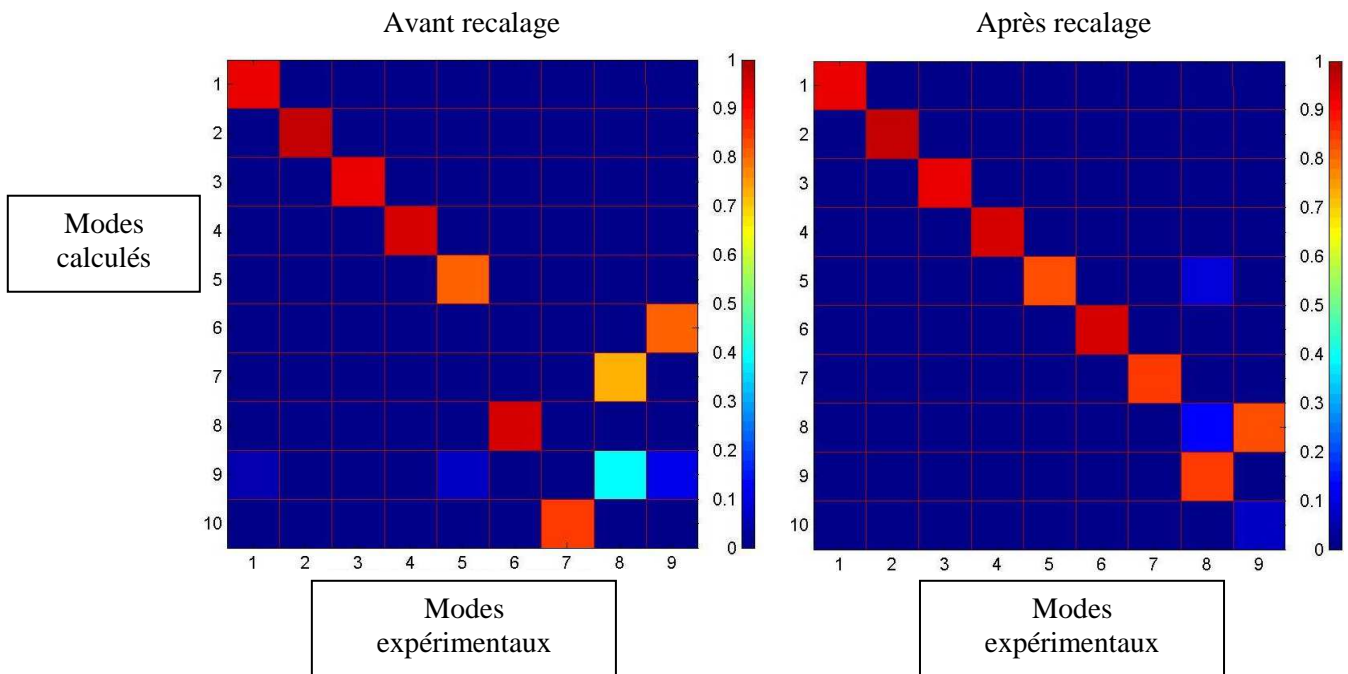


Fig III. 51: Matrices MAC avant et après recalage (cas d'homogénéisation 3)

Bilan général des 3 cas de recalage :

Les résultats des recalages avec ou sans coefficients de Poisson conduisent à des résultats de qualité équivalente.

Le cas avec coefficients de Poisson nuls présente de plus une meilleure qualité de prédiction, avant recalage, par rapport aux autres cas. Par ailleurs une étude de sensibilité sur les coefficients de Poisson montre une faible influence de ceux-ci sur le modèle global du stator.

C'est pour ces raisons, que nous suggérons de faire une modélisation de l'empilement feuilleté avec un modèle homogène orthotrope et des coefficients de Poisson nuls.

N° mode mesure	Fréquence expérimentale (Hz)	N° mode calcul	Erreurs fréquentielles (%)		MAC (%)	
			Avant	Après	Avant	Après
#1	597.7	#1	-1.7	-3.9	90	93
#2	610.4	#2	16.3	1.3	89	96
#3	656.0	#3	8.1	-1.9	90	92
#4	863.0	#4	-2.4	-4.3	89	94
#5	1522.5	#5	-3.9	2.2	81	83
#6	1596.5	#6	16.2	-1.0	95	95
#7	1671.2	#7	10.1	-1.4	81	86
#8	1772.3	#9	7.6	-1.2	83	84
#9	1832.9	#8	-10.6	-6.7	80	84

Tab III. 22: Bilan des performances du recalage (cas d'homogénéisation 3)

III.3.3.2.2. Sur le stator bobiné

On s'intéresse à recalculer les paramètres influents du matériau orthotrope du bobinage et illustrer les résultats de recalage en fonction de différents choix de paramètres.

Les coefficients des paramètres sont limités à [0.1 1.9] par rapport à leurs valeurs initiales. La variation maximale par itération est limitée à $\pm 10\%$. La minimisation de la sortie est effectuée sur les écarts fréquentiels relatifs et les différences entre les vecteurs propres mesurés et calculés pour les modes appariés.

Les paramètres retenus pour le recalage sont ceux sélectionnés lors de l'étude de sensibilité. Ils sont au nombre de 7 et correspondent aux zones extrémités du bobinage (têtes de bobines et cercles de phases).

La liste de ces paramètres, avec leur évolution après recalage, est illustrée dans le tableau Tab III.22.

Paramètres	Valeurs initiales (MPa)	Coefficient de variation après recalage
E_x (zone1)	1500	0.90 (-10%)
G_{xy} (zone1)	300	1.20 (+20%)
G_{xz} (zone 1)	300	1.25 (+25%)
E_x (zone2)	1500	1.90 (+90%)
G_{xy} (zone 2)	300	0.70 (-30%)
G_{xz} (zone 2)	300	1.80 (+80%)
G_{yz} (zone 4)	150	1.20 (+20%)

Tab III. 23: Variation des paramètres après recalage (bobinage)

N° mode mesure	Fréquence expérimentale (Hz)	N° mode global calcul	Erreurs fréquentielles (%)		MAC (%)	
			Avant	Après	Avant	Après
#1	446.8	#1	0.6	-3.9	85	85
#2	572.6	#2	-2.3	1.3	88	91
#3	676.6	#3	0.9	-1.9	86	87
#4	785.1	#4	-2.3	-4.3	96	95
#5	911.1	#5	5.3	2.2	88	87

Tab III. 24: Bilan des performances du recalage (bobinage)

Bilan du recalage :

On constate dans le tableau Tab III.23 une légère amélioration des écarts fréquents relatifs après le recalage. Les MAC restent quasiment inchangés. Ceci est dû au fait que les écarts initiaux, erreurs de prédiction par la méthode directe, étaient faibles avant recalage (méthode inverse). Autrement dit, la solution optimale, pour cette modélisation et avec ses paramètres initiaux, ne peut aller au-delà de cette précision.

Ceci implique d'un côté que les hypothèses de la modélisation construite par la méthode directe prédisaient, avant recalage, une solution dont l'erreur faible ne peut être corrigée par le recalage. D'un autre côté, d'après le tableau Tab III.22, de fortes variations introduites lors du recalage sur les 6 paramètres sélectionnés ont abouti au même niveau de prédiction. Cette solution n'est donc pas unique et les paramètres retenus par étude de sensibilité, s'avèrent être en réalité peu influents sur le comportement du modèle même s'ils sont plus influents que les autres.

Nous remarquons par ailleurs que la précision du recalage (comprise dans [-4% ; +4%] sur les écarts fréquents relatifs et supérieure à 85% sur les MAC) est du même ordre de grandeur que la dispersion de fabrication quantifiée précédemment par l'étude de deux stators bobinés de même série (paragraphe 3.1.2.3).

Une erreur épistémique est de fait présente à cause de cette dispersion due à la fabrication.

Une autre erreur épistémique est également présente à cause des limites de la représentativité du modèle et de son paramétrage pour lequel une solution optimale est prédictive à hauteur de 85% de MAC au maximum.

III.3.4. Principes de modélisation retenus

L'étude du stator d'architecture de type 1 a permis d'établir des règles générales de modélisation qui permettent de prédire le comportement dynamique d'un stator de design générique avec une précision raisonnable (écarts fréquentiels relatifs compris dans [-4% ; 4%] et MAC moyen supérieur à 85% dans la bande fréquentielle [0 ; 1000] Hz.

Ces règles sont résumées dans les points suivants :

- **Modélisation du stator nu :**

- Aucun élément de contact n'est nécessaire dans la modélisation. Les zones naturellement en contact sont collées les unes par rapport aux autres dans ce modèle, notamment l'empilement de tôles feuilleté et sa carcasse de maintien.
- Le respect de la géométrie interne du stator, caractérisée par la présence des encoches, est nécessaire pour assurer une bonne prédiction à la fois des modes radiaux purs et non-radiaux de la structure.
- L'empilement feuilleté est considéré comme un stratifié homogène orthotrope. Ses paramètres de raideur sont estimés par méthode d'homogénéisation. Toutefois, seule l'hypothèse d'un couplage faible, voire nul, entre les comportements axiaux et radiaux du feuilleté assure une bonne prédiction de son comportement dynamique. Ce faible couplage est traduit par un coefficient de Poisson faible ou quasi nul dans le sens axial (inférieur à 0.1).
- Le volume de la résine est assimilé au volume des interstices entre les feuilles de l'empilement de tôles. Ce volume est estimé par confrontation des masses volumiques mesurée et calculée.

- **Modélisation du bobinage :**

- La modélisation du bobinage par du cuivre isotrope est inadaptée. Seule une modélisation « multi-blocs » prenant en compte séparément les zones insérées, les têtes de bobines et les cercles de phase est adaptée.
- Les têtes de bobines naturellement tressées sont modélisées par des volumes annulaires homogènes orthotropes.
- La zone insérée du bobinage est collée aux parois des encoches de l'empilement de tôles du modèle. Autrement dit, aucun phénomène de contact n'est modélisé.
- La connaissance des fractions volumiques du cuivre est déterminante pour le calcul des paramètres matériaux orthotropes dans les différentes zones du bobinage. Celle-ci est estimée dans un intervalle de 60 à 70%.
- Le calcul des masses volumiques des différentes parties du bobinage nécessite le respect des masses et dimensions réelles des différents composants à partir des plans de conception. La répartition des masses dans le bobinage est un élément déterminant.

- Les matériaux de la partie centrale du bobinage sont calculés par une technique d'homogénéisation. L'hypothèse de coefficients de Poisson quasi nuls est là aussi introduite.
- Les extrémités du bobinage sont modélisées par 3 zones distinctes:
 - Le cercle de phase et deux têtes de bobines. Ces deux dernières ont des géométries et des matériaux identiques.
 - Ces 3 zones ont des propriétés de raideur très faibles, comparables aux raideurs des tissus isolants. Leur présence dans le modèle est toutefois nécessaire. Ces zones contribuent par leur masse et leur raideur dans le comportement global du stator.

III.4. Extension des règles de modélisation retenues à une architecture de type 2

Après avoir établi, par méthode directe, et validé, par méthode inverse, des règles de modélisation sur un stator d'architecture de type 1, nous les confrontons dans cette partie au cas d'un stator d'architecture différente. En effet, et dans le but de valider le caractère générique de ces règles, nous les transcrivons au cas d'un design différent du premier essentiellement en termes de géométrie, de dimensions et de propriétés matérielles.

Il s'agit donc dans cette partie de modéliser ce nouveau stator avec ces règles et de juger leurs limites de prédiction par rapport à des résultats expérimentaux.

III.4.1. Description de l'architecture de la structure

Le principe d'assemblage de ce stator d'architecture 2 est quasi identique au cas précédent (Fig III.52). Il comprend donc un noyau ferromagnétique composé de plusieurs centaines de feuilles empilées et dont la cohésion est maintenue par des éléments de carcasse (plateaux de serrage et entretoises) soudés. Des bobines en cuivre feuilleté sont également insérées dans les encoches intérieures du stator. Comme dans le cas du stator de type 1, l'ensemble du bobinage a deux extrémités en porte à faux par rapport au reste du stator, comprenant les têtes de bobines ainsi que les cercles de phase.

Les différences entre les architectures de type 1 et 2 peuvent se résumer dans les points essentiels indiqués dans le tableau Tab III.25.

	Architecture type 1	Architecture type 2
Masse (kg)	165	416
Encombrement radial (mm) (Er)	50	84
Encombrement axial (mm) (Ea)	40	52
Rapport Er / Ea	1.25	1.61
Encombrement extrémités des bobines (face 1) par rapport à la hauteur de l'empilement	0.25	0.20
Encombrement extrémités des bobines (face 2) par rapport à la hauteur de l'empilement	0.45	0.36

Tab III. 25: Principales variantes entre les architectures de type 1 et 2

D'autres éléments différencient en plus l'architecture 2 par rapport à la première, telles que la géométrie externe (globalement plus cylindrique que polyédrique), le nombre d'entretoises et leur design allégé (présence de trous sur la longueur des entretoises) et la présence de pied de suspension sur lesquelles repose le stator. D'autres différences portent sur le nombre de couches de cuivre composant le bobinage ainsi que la proportion d'isolant et de résine, plus importante dans le cas de l'architecture 2.

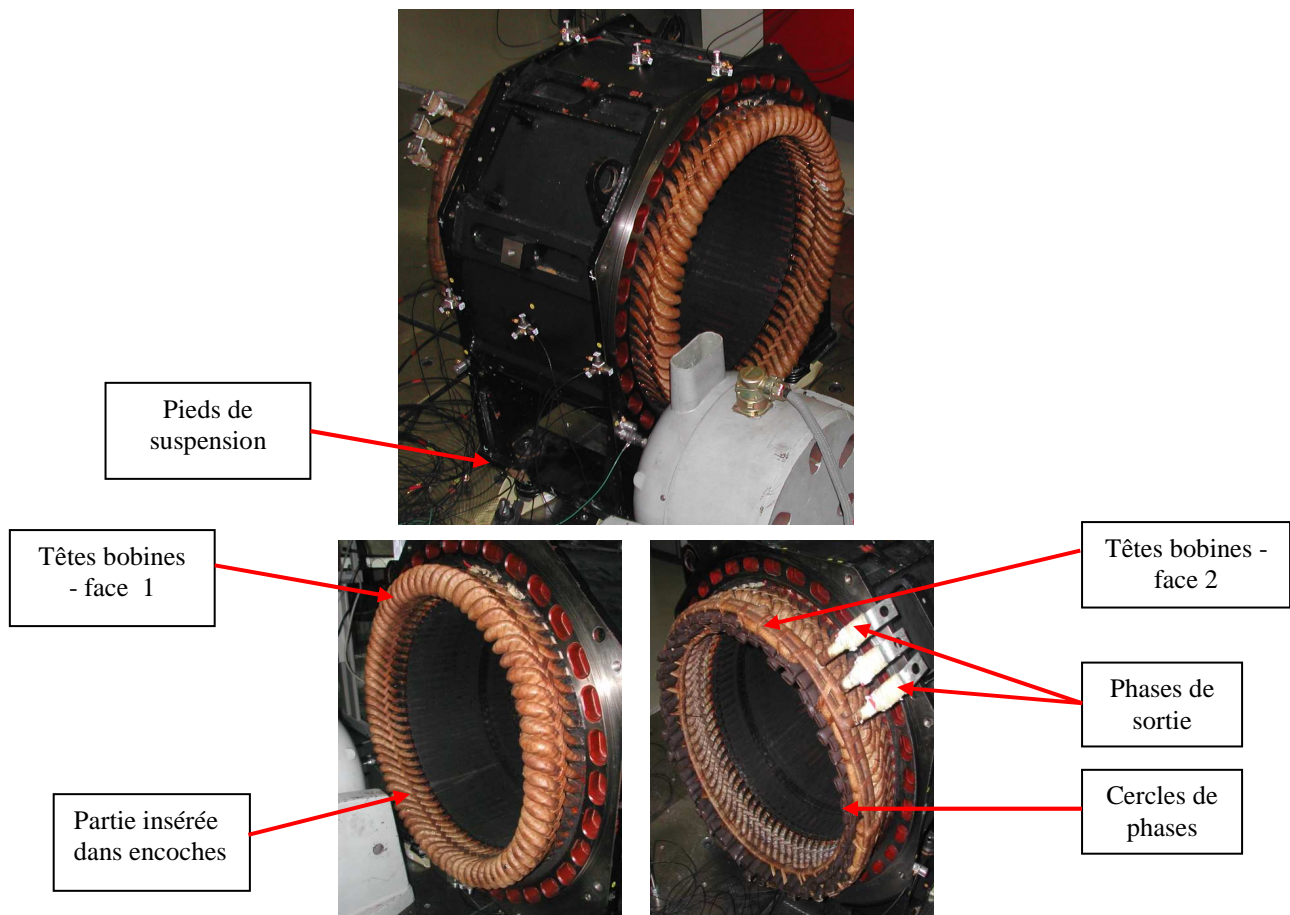


Fig III. 52: Présentation d'un stator d'architecture de type 2

Ces différences de répartition de raideurs (pieds de suspension et entretoises allégées...etc) et de masses (dimensions des bobinages...etc) influent nécessairement sur le comportement dynamique global du stator.

Ces points de différences ont une influence sur les hypothèses de modélisation des liaisons entre la carcasse et le noyau feuilleté, sur la modélisation par homogénéisation de l'empilement de tôles ainsi que sur la prise en compte du bobinage. La retranscription des règles établies précédemment sur cette architecture permettra de juger leurs limites de prédiction.

III.4.2. Campagne d'essais

III.4.2.1. Conditions d'essais

Une analyse modale expérimentale a été réalisée sur ce stator afin de mesurer ces paramètres modaux dans la bande [0 ; 1000] Hz. Les conditions et moyens expérimentaux, détaillés dans le paragraphe III.3.1.1.1., ont été reproduits sur cette structure.

La seule différence de ce montage par rapport au cas du stator de type 1 est le type de conditions aux limites. En effet ; en raison de sa masse importante (416 kg), une suspension sur ressorts a été retenue au lieu d'une suspension par câbles comme c'était le cas pour le montage précédent.

Le stator est donc monté en libre – libre et suspendu par des ressorts en quatre points au sol. Pour minimiser l'influence des ressorts, leurs valeurs ont été sélectionnées pour que les modes de suspension pour une masse équivalente à celle du stator soient très faibles, (6 Hz), et donc négligeables dans l'identification des modes déformables du stator (au-delà de 200 Hz). La figure (Fig III.53) illustre une des quatre suspensions métalliques utilisées.

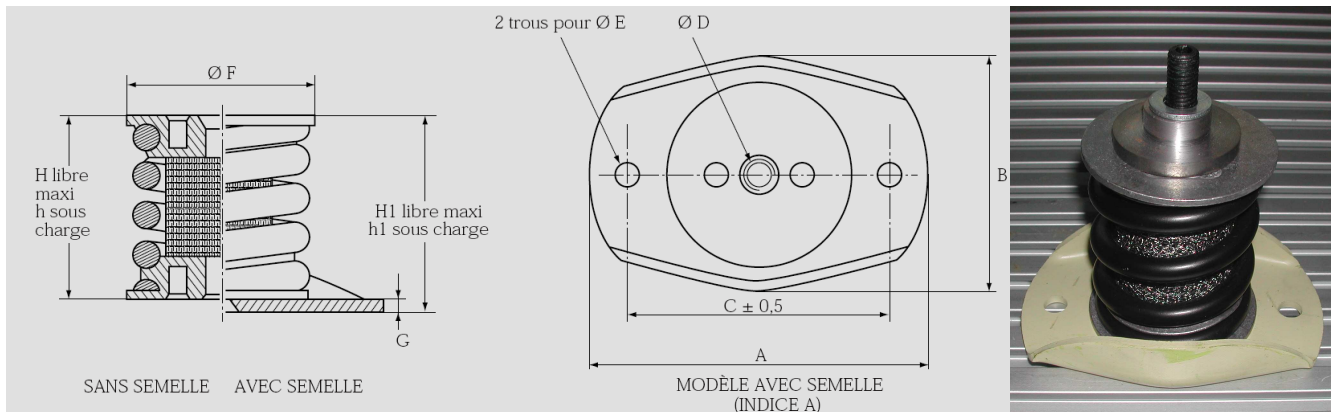


Fig III. 53: Description de la suspension métallique utilisée (essais architecture 2)

Il s'agit de suspension métallique PAULSTRA de référence VIB 1135 – 03A.

Les caractéristiques techniques de cette suspension peuvent être résumées dans le tableau Tab III.25:

A mm	B mm	C mm	D diamètre	E mm	F mm	G mm	H mm	h mm	H1 mm	h1 mm
140	100	110	M12	11	78	4	88	78	92	82 +/-2
Gamme de charge statique						80 à 130 daN				
Fréquence propre axiale (pour la gamme de charge)						5 à 6Hz				
Amplitude maximale d'excitation à la fréquence de résonance de la suspension						+/-1 mm				

Tab III. 26: Caractéristiques techniques de la suspension métallique (stator architecture 2)

Le choix des points d'excitation se fait selon la même démarche explicitée dans le paragraphe III.3.1.1.1. La bande fréquentielle d'excitation et d'analyse a été fixée à [0 ; 1000] Hz.

Concernant l'implantation des capteurs, 34 points de mesure ont été sélectionnés. Chaque point est instrumenté dans les trois directions.

Comme dans le cas du stator d'architecture 1, le stator a été instrumenté en 6 fois par déplacements successifs de 11 ou 12 triaxes à chaque essai.

Les positions des points instrumentés sont présentées sur la figure Fig III.54 (points rouges).

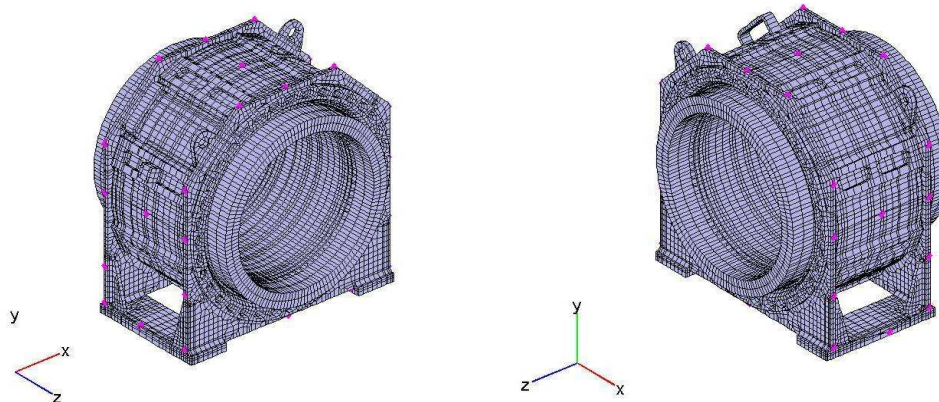


Fig III. 54: Emplacements des capteurs sur le modèle (points rouges)

III.4.2.2. Résultats de l'analyse modale expérimentale

Après les dépouillements des fonctions de transfert, représentées par les 102 points capteurs, nous pouvons identifier (figure Fig III.55), avec de bons critères de validation expérimentale, 4 modes dans une bande fréquentielle de 0 à 1000 Hz (Tab III.26). En effet, ces modes ont été identifiés avec des niveaux de MPC (*Maching Phase Colinearity*) de plus de 99.9% ce qui permet de leur accorder un niveau de confiance important. Au-delà de la fréquence du 4^e mode, l'identification des modes est plus délicate en raison du bruit important et du fort couplage entre les modes de la structure.

L'identification, par méthode globale des pôles, doit se faire à des rangs de stabilisation très élevés et des niveaux de MPC inférieurs à 80%.

Il est cependant à noter qu'un couplage relativement important est déjà présent entre les modes identifiés et ce à partir de la deuxième résonance. Ceci est montré lors de la visualisation de la phase dont un exemple est illustré figure Fig III.55. Nous observons en effet que les fréquences modales des modes identifiés sont relativement proches (4 modes globaux dans la bande fréquentielle [276 ; 321] Hz) et que des variations importantes de la phase dans cette bande fréquentielle sont traduites par des sauts.

Ceci rend délicat l'identification modale et introduit, de fait une incertitude épistémique liée aux essais et au processus d'identification des pôles.

Par ailleurs, il sera difficile de distinguer clairement et avec une grande précision ces modes en conditions de service, notamment à cause de l'élévation de la température. La distingabilité des modes, dont les fréquences sont séparées de 3 à 8% de leur valeurs moyennes, est par ailleurs affectée par le processus de fabrication, qui comme nous l'avons estimée précédemment, est de l'ordre de 2% à 4% en fréquence.

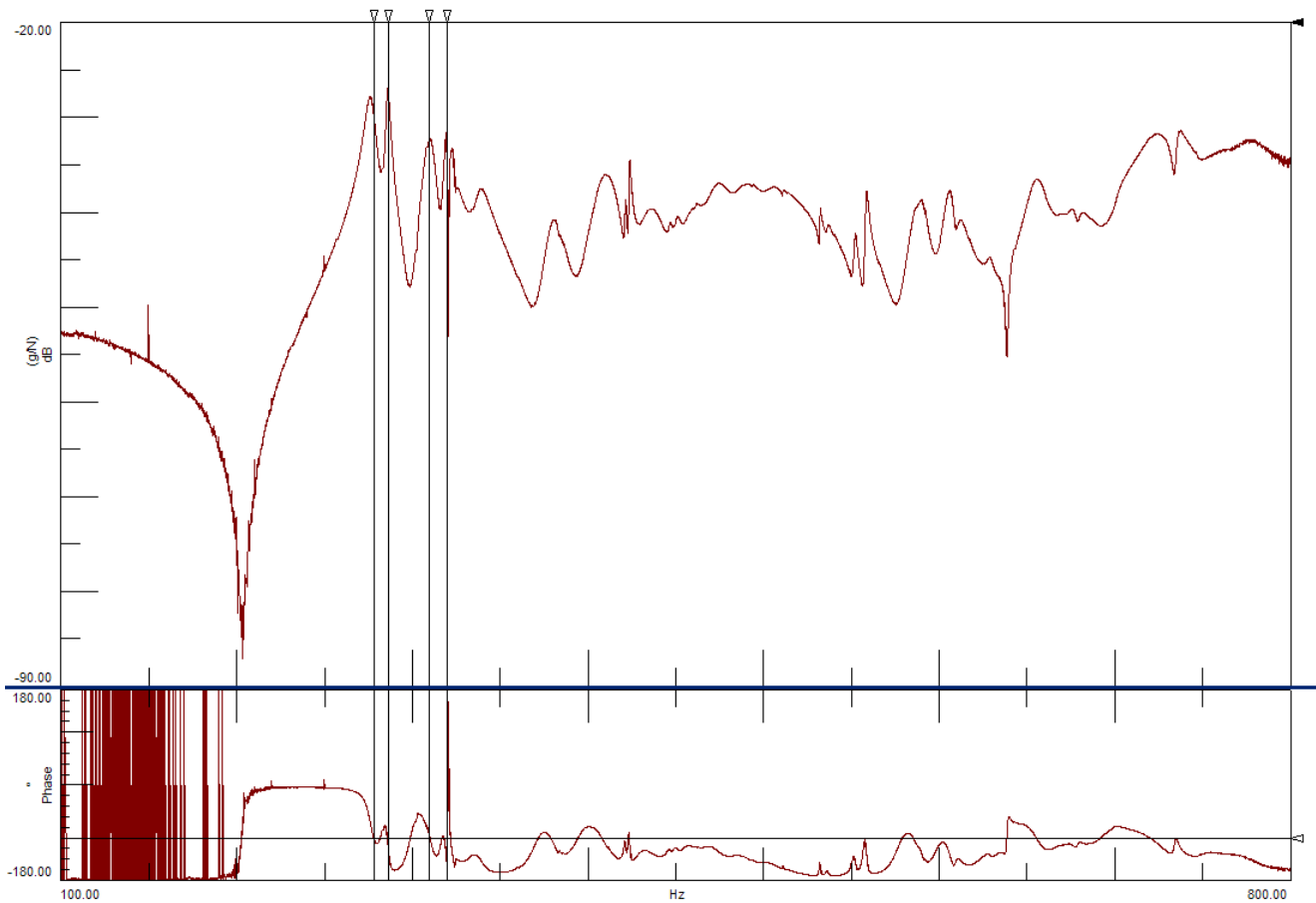
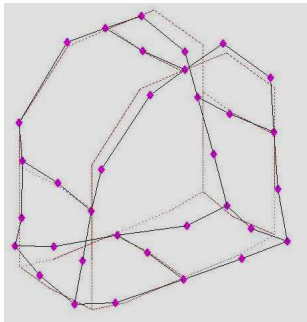
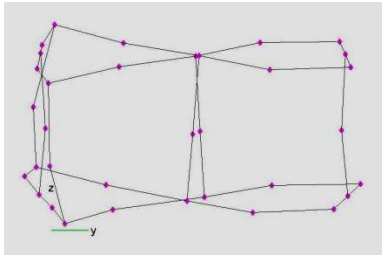
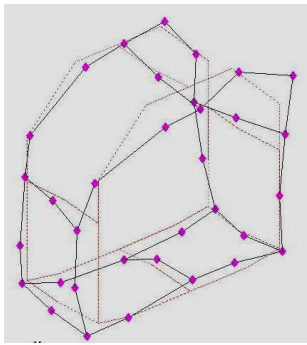
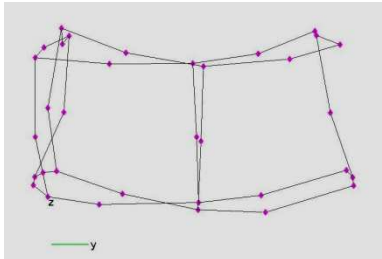


Fig III. 55: FRF co-localisée sur le point d'excitation de la structure d'architecture 2

Les déformées modales mesurées sont assez difficiles à caractériser en 3D. Nous pouvons cependant observer des déformées de même nature que celle observées pour le stator d'architecture, à savoir un couplage entre modes radiaux purs et des modes non radiaux. Le tableau Tab III.27 illustre l'exemple des déformées des modes 1 et 4 mesurés.

Mode	Fréquences propres (Hz)	Amortissement modaux (%)
1	276.0	1.03
2	287.0	0.34
3	309.8	0.88
4	321.1	0.44

Tab III. 27: Modes propres identifiés (Hz)

Mode	Fréquence propre (Hz)	Déformées modales 3D	
1	276.0		
4	321.1		

Tab III. 28: Déformées modales mesurées

III.4.3. Modélisation : retranscription des principes établis

La modélisation de cette architecture respecte les règles retenues dans le paragraphe III.3.4. Le modèle contient au final 301802 degrés de liberté, 50304 nœuds et 37043 éléments de type solide (Fig III.58).

III.4.3.1. Géométrie du modèle

La géométrie du modèle se base essentiellement sur des données CAO du constructeur.

Les figures (Fig III.56, Fig III.57 et Fig III.59) illustrent les composants principaux du modèle dégroupé en trois parties : carcasse en acier, empilement de tôles et bobinage intérieur et extérieur.

III.4.3.2. Propriétés matérielles

La masse totale calculée du modèle est de 422 kg, soit un écart de 1.5% par rapport à la valeur pesée, répartie comme indiqué dans le tableau Tab III.28.

Composants	Matériau	% dans la masse totale
Eléments de carcasse	Acier	20%
Bobinage (Têtes de bobines, Cercle de phase, Zone insérée du bobinage)	Cuivre + isolant + résine	19%
Empilement feuilleté	Tôlerie	61%

Tab III. 29: Masse des composants du modèle de stator d'architecture 2

La carcasse, constituée des composants en acier et des soudures, a été modélisée en acier isotrope avec les valeurs suivantes: $E = 210\,000\text{ MPa}$; $\nu = 0.3$; $\rho = 7.8 \cdot 10^{-9}\text{ T/mm}^3$.

Les matériaux orthotropes de l'empilement feuilleté et du bobinage, et ont été calculés par homogénéisation suivant la démarche établie pour le cas du stator de type 1.

Le tableau Tab III.29 résume les valeurs des matrices $[C]$ de ces matériaux orthotropes calculées avec la contrainte des coefficients de Poisson nuls ainsi que les valeurs des densités des différentes zones du bobinage.

Pièce	C_{11} (MPa)	C_{22} (MPa)	C_{33} (MPa)	C_{44} (MPa)	C_{55} (MPa)	C_{66} (MPa)	ρ ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)
Cercle de phase	1500	1500	1500	150	150	150	$4.32 \cdot 10^{-9}$
Bobinage	3680	3680	75000	2225	27400	27400	$4.48 \cdot 10^{-9}$
Tête de bobine 1	1500	1500	1500	400	300	300	$2.55 \cdot 10^{-9}$
Tête de bobine 2	1500	1500	1500	400	300	300	$2.55 \cdot 10^{-9}$
Paquet de tôle	193000	193000	27000	75000	8795	8795	$7.4 \cdot 10^{-9}$

Tab III. 30: Matériaux du bobinage et de l'empilement feuilleté

Après le calcul, les valeurs sont modifiées par rapport aux valeurs trouvées dans le cas du stator d'architecture 1 notamment les coefficients du bobinage. Les valeurs des densités ont également été nettement modifiées en raison de la différence de répartition massique des bobines par rapport à l'architecture 1.



Fig III. 56: Empilement feuilleté architecture 2

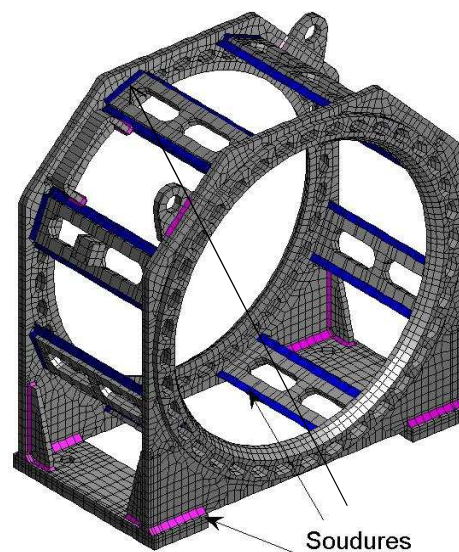


Fig III. 57: Carcasse architecture 2

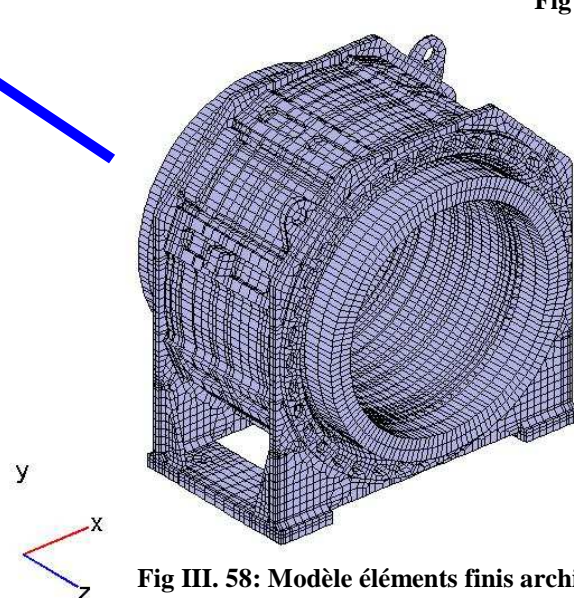


Fig III. 58: Modèle éléments finis architecture 2

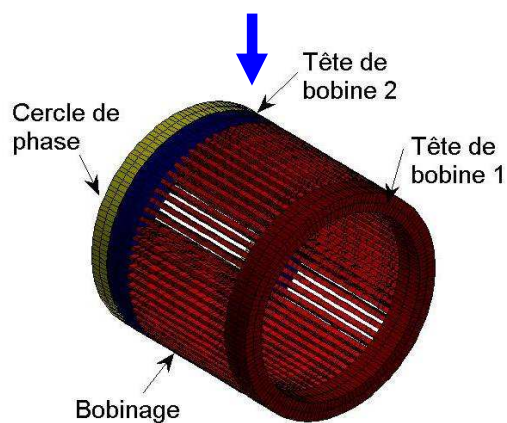


Fig III. 59: Bobinage architecture 2

III.4.4. Confrontation avec les résultats expérimentaux

Dans le tableau Tab III.30, on résume le bilan de la confrontation mesure-calcul du stator d'architecture 2.

N° mode expérimental	Fréquence expérimentale (Hz)	Erreur fréquentielle relatives(%)	MAC mesure-calcul (%)
#1	276.0	-1.6	92.4
#2	287.0	-3.1	77.2
#3	309.8	31.6	82.9
#4	321.1	13.48	45.0

Tab III. 31: Bilan de la confrontation mesure- calcul du stator d'architecture 2

Le modèle prédit les deux premiers modes avec de bons niveaux d'erreurs fréquentielles relatives (de l'ordre de 3% en valeur absolue) et de MAC (supérieurs à 77%).

La prédiction sur les deux modes d'ordre plus élevé se dégrade. Ceci se justifie par la difficulté du modèle à prendre en compte les phénomènes physiques mis en jeu au fur et à mesure que les déformées se complexifient. La prédiction du modèle se dégrade lorsque les interactions énergétiques entre les zones sensibles de la structure, notamment l'empilement feuilleté et les extrémités du bobinage, sont complexes.

Néanmoins les deux premiers modes globaux de la structure ont été prédits correctement par les règles de modélisation sans la mise en place d'un processus de recalage.

En phase de conception, ce niveau de prédiction est précieux et évite un recours systématique à un essai souvent lourd à mettre en place, notamment pour des structures aussi massives et encombrantes.

III.5. Bilan et établissement de règles de modélisation

III.5.1. Limites de prédiction

Comme évoqué précédemment, la qualité de prédiction des règles de modélisation se dégrade avec la complexité des déformées modales de la structure physique.

Afin d'analyser les difficultés rencontrées, nous avons calculé les énergies de déformations élémentaires pour les modes calculés et appariés avec les modes expérimentaux.

La figure Fig III.60 illustre les énergies de déformations élémentaires sur le maillage du modèle.

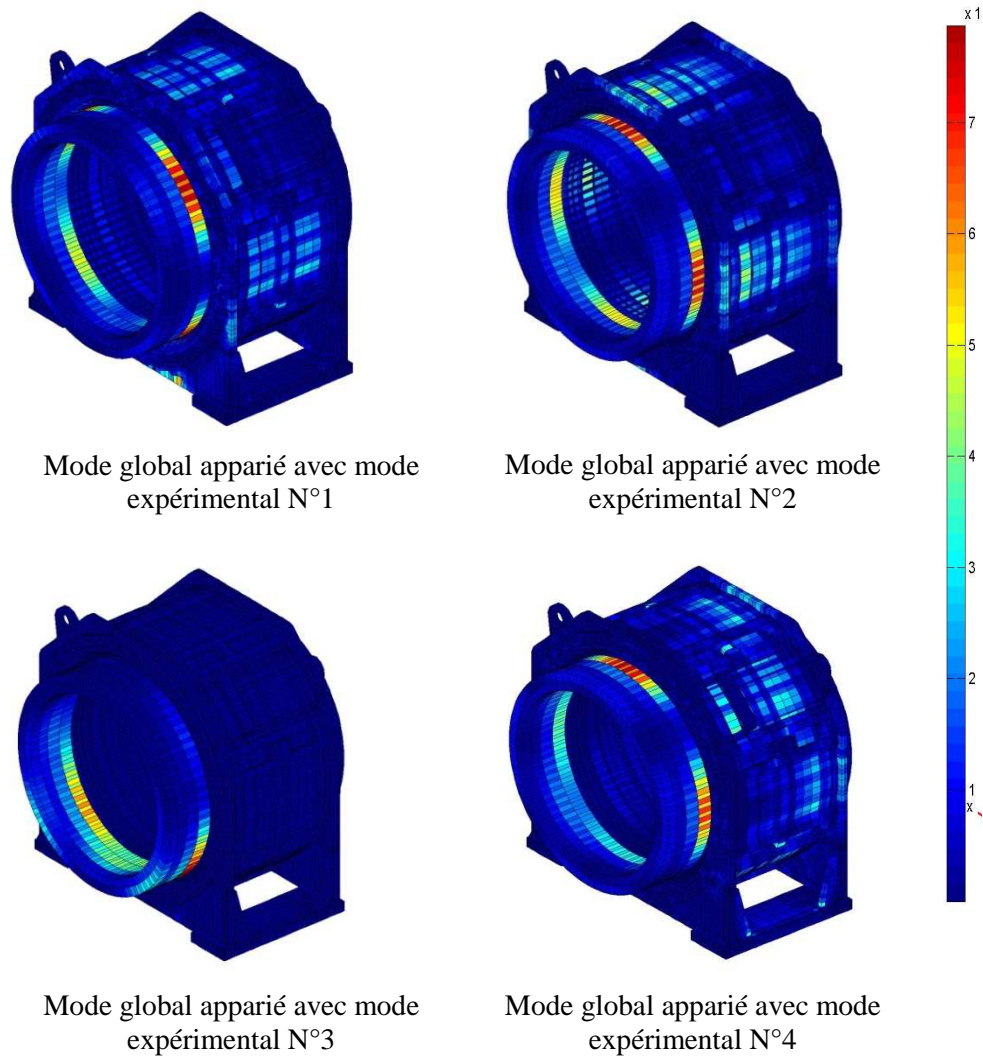


Fig III. 60: Energies de déformations élémentaires – Stator d’architecture 2

Sur la figure Fig III.60, l'énergie de déformation est localisée essentiellement sur l'extrémité du bobinage côté cercles de phase ainsi que sur l'empilement feuilleté.

Or ces zones regroupent d'un côté les hypothèses de modélisation les plus fortes et d'un autre les phénomènes physiques les plus complexes. Bien que cette visualisation des énergies de déformations n'est que qualitative, elle indique néanmoins que les mêmes zones sont le lieu d'échanges d'énergies pour les 4 modes analysés.

La dynamique régie par les échanges énergétiques entre l'empilement feuilleté et l'extrémité du bobinage côté cercles de phases n'est plus prédite correctement au fur et à mesure que les déformées se complexifient.

Afin de confirmer ce constat, nous avons réalisé une étude de sensibilité sur les fréquences et vecteurs propres des modes globaux appariés avec les mesures (Fig III.61 et Fig III.62). Tous les paramètres de raideurs examinés dans l'étude du stator d'architecture 1 ont été repris, avec en plus, cette fois ci, l'intégration des paramètres de masses, notamment les densités des zones du bobinage et de l'empilement feuilleté.

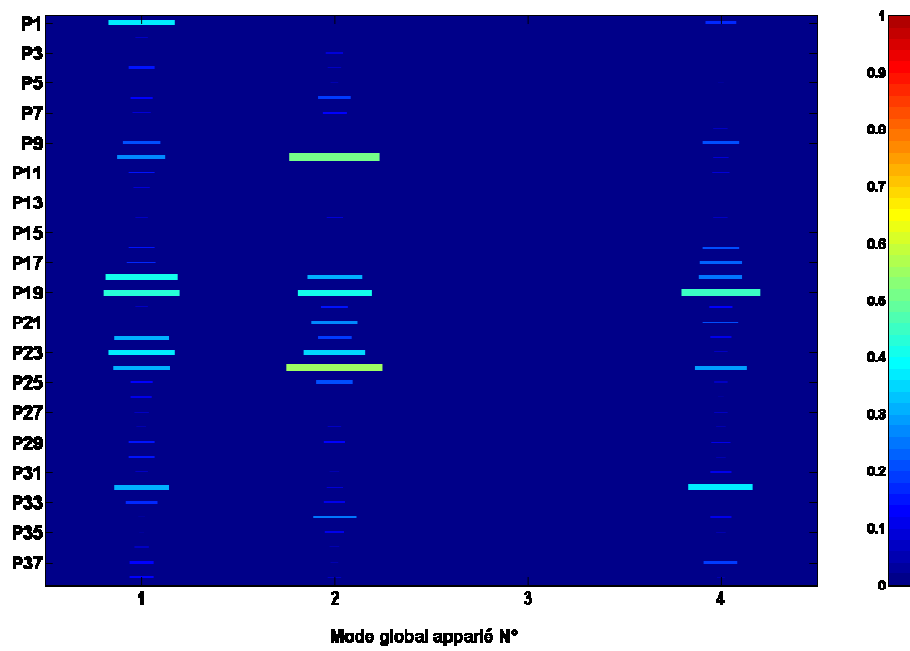


Fig III. 61: Sensibilité des fréquences propres par rapport aux paramètres

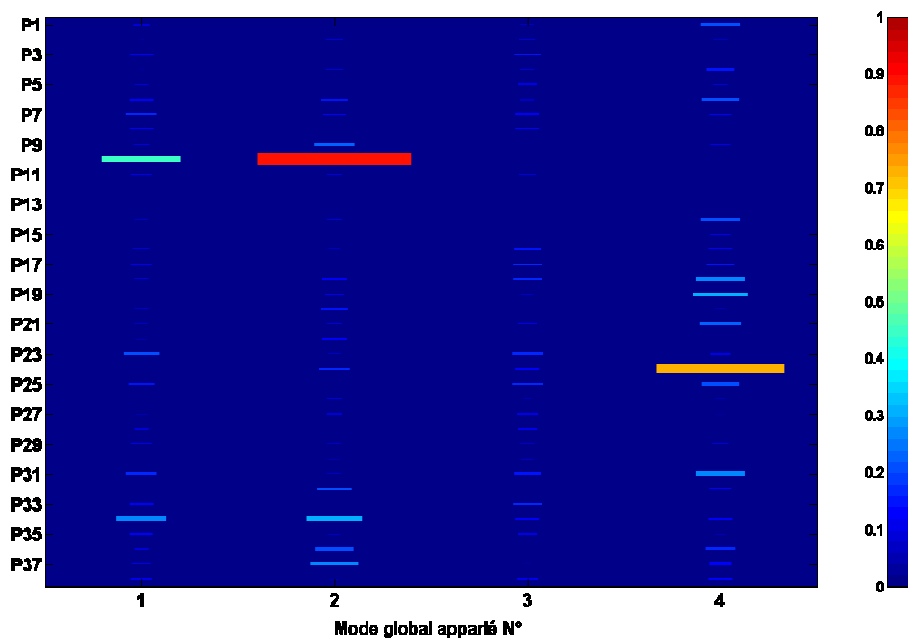


Fig III. 62: Sensibilité des vecteurs propres par rapport aux paramètres

Nous remarquons, figures Fig III.61 et Fig III.62, que les paramètres les plus influents sur le comportement dynamique du modèle d'architecture 2 sont essentiellement les paramètres P10 (densité des cercles de phases), P18, P19 (modules de Young longitudinaux de l'empilement feuilleté), P22, P23 (coefficients de cisaillement transverses de l'empilement feuilleté), P24 (densité de l'empilement feuilleté), P32, P34 (modules de Young des têtes de bobines côté cercles de phases).

Les têtes de bobines sont la partie du modèle présentant le plus d'incertitude de modélisation. Or, nous n'avons pas suffisamment d'informations provenant des mesures précédentes (sans capteur sur le

bobinage) pour les qualifier. Nous avons donc décidé de procéder à un essai supplémentaire afin d'éclairer les déformations au niveau des extrémités des têtes de bobines et qualifier la représentabilité du modèle d'homogénéisation dans les têtes de bobine.

Un essai complémentaire a été réalisé afin de confirmer l'effet des têtes de bobines sur le comportement dynamique du stator.

La démarche suivie se résume dans les points suivants:

- Encastrer le bas du stator afin de réduire l'influence de la carcasse;
- Exciter les têtes de bobines, côté cercles de phase afin d'obtenir plus d'informations possibles dans cette partie du stator (Fig III.63). La bande fréquentielle d'excitation est autour de $[0; 1000]$ Hz;
- Placer 12 capteurs sur les têtes de bobines face 2 de manière concentrique afin d'observer leurs déformées modales (Fig III.63, Fig III.64);
- Comparer les solutions propres mesurées et calculées.

La figure Fig III.64 illustre le montage des mesures dont les capteurs ont été orientés vers le centre des têtes de bobines.

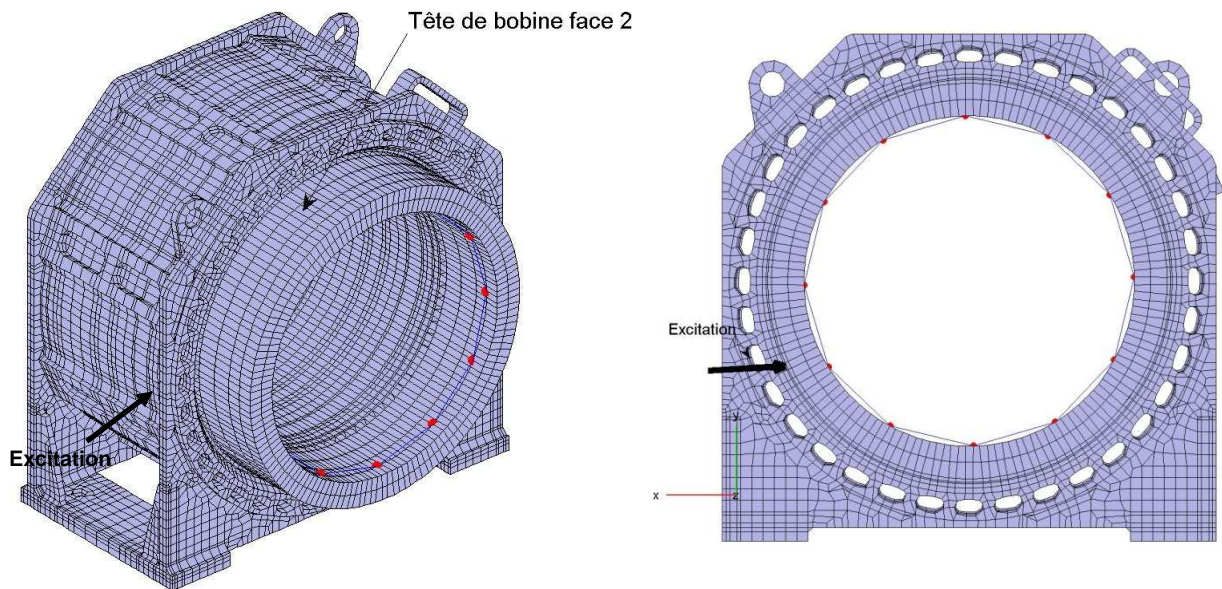


Fig III. 63: Mesure sur les têtes de bobines : 12 points de mesure (points rouge) et position de l'excitateur

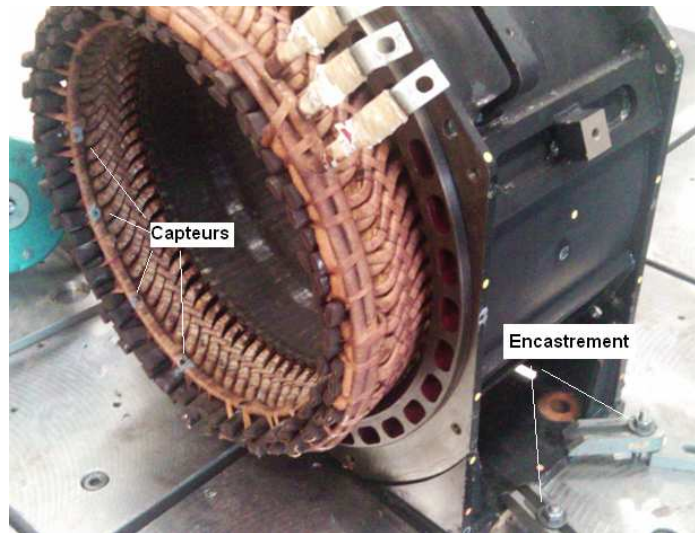


Fig III. 64: Montage expérimental : architecture 2, essais sur têtes de bobines et cercles de phases isolés

Les valeurs des premières fréquences propres de cette zone de bobinage étudiée sont données dans le tableau Tab III.31.

Mode	Fréquence (Hz)
# 1	97.4
# 2	129.5
# 3	185.7
# 4	199.8
# 5	278.6
# 6	293.3
# 7	360.6
# 8	373.4
# 9	393.0
# 10	408.3

Tab III. 32: Fréquences propres de la zone du bobinage étudiée (stator architecture 2, têtes de bobines côté cercles de phase)

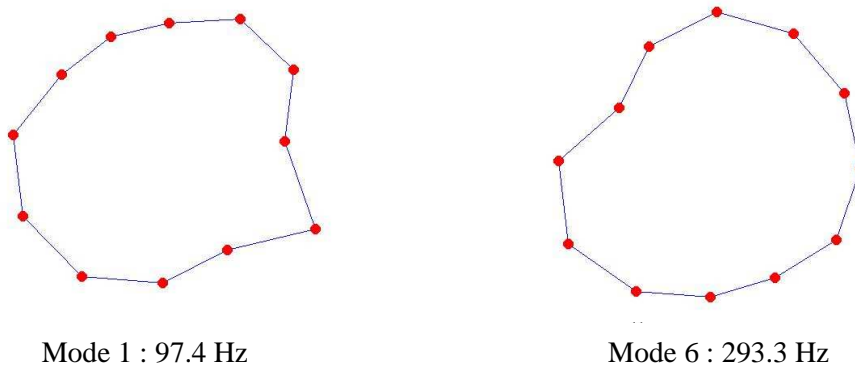


Fig III. 65: Déformées modales des têtes de bobines et cercles de phases : irrégularités et non-linéarités de grands déplacements

La présence des modes expérimentaux 5 et 6 (278.6 Hz et 293.3 Hz) dans la bande fréquentielle des modes du stator bobiné testé en libre-libre ([276, 321] Hz), confirme l'effet des modes de têtes de bobines. Or, des phénomènes complexes, tels que des interactions entre ces têtes et le reste du stator, des non-linéarités géométriques de grands déplacements (Fig III.65)...etc, sont présentes dans ces zones.

Par ailleurs, cette zone du bobinage présente de fortes incertitudes en raison de son processus de fabrication manuel. Le modèle actuel de têtes de bobines homogènes n'est par conséquent pas assez représentatif pour prédire dans le détail leur comportement complexe, ce qui justifie la présence d'importantes erreurs de modélisation dans cette zone.

Finalement, les zones les plus influentes par leur raideur, mais également par leur répartition de masses se résument à l'empilement feuilleté et à l'extrémité du bobinage côté cercles de phase.

Cette étude confirme l'analyse de sensibilité effectuée sur le stator d'architecture 1 et indique de plus l'influence des propriétés de masse et leur répartition dans le modèle. Or les paramètres de masse, notamment celles des différentes zones du bobinage sont difficilement identifiables avec précision à partir de la structure physique. En effet ; une bobine se présente en réalité en un seul composant, dont la masse totale est connue, et non en 4 zones dont il est difficile d'estimer avec une précision acceptable la répartition.

Ainsi, en réalité une incertitude liée au choix de la modélisation du bobinage est introduite. Les paramètres homogénéisés qui en sont issus, ne peuvent par conséquent pas prédire correctement, car trop restrictifs, la complexité du comportement dynamique réel.

Bilan:

- Les deux premiers modes globaux à basses fréquences ont été prédits par le calcul sans recours à un ajustement ou à un recalage paramétrique. Cette information est primordiale pour une étude de conception ne recourant pas à un essai suivi d'un recalage systématique.
- La qualité de prédiction se dégrade au fur et à mesure que la complexité des déformées augmente.
- Les paramètres les plus influents du modèle sont essentiellement relatifs à l'empilement feuilleté et à l'extrémité du bobinage côté cercles de phases.
- En considérant, sur la base de la bonne qualité de prédiction des deux premiers modes, que son énergie de déformation est représentative de la réalité physique, les transferts énergétiques entre ces deux zones ne sont plus pris en compte correctement par le modèle pour les modes d'ordre plus élevé.
- En plus des paramètres de raideur relatifs à l'empilement feuilleté et à l'extrémité du bobinage côté cercles de phases, les paramètres de raideurs de ces zones sont également influents.

III.5.2. Synthèse et conclusions

Après l'étude menée sur une architecture typique de stators à savoir l'architecture 1 et l'établissement de règles de modélisation, nous avons vérifié la pertinence de ces derniers ainsi que leurs limites de prédiction sur un autre stator. Notre étude s'est focalisée sur le comportement dynamique d'ensemble à basses fréquences des structures de stators. Au vu des résultats obtenus, nous pouvons retenir les règles suivantes (déjà établies dans le paragraphe 3.5) qui pourront être généralisées à tout type de stator ferroviaire :

- La modélisation du stator est décomposée en deux phases à savoir la construction du modèle nu et ensuite de ses bobinages ;

- **Concernant la modélisation du stator nu :**

- L'ensemble du modèle éléments finis est construit en éléments 3D.

- Aucun élément de contact n'est nécessaire dans la modélisation. Les zones naturellement en contact sont soit collées les unes par rapport aux autres soit posées en vis-à-vis les unes par rapport aux autres.
- L'empilement feuilleté et considéré comme un ensemble homogène orthotrope. Ses paramètres de raideur sont estimés par méthode classique d'homogénéisation avec l'hypothèse d'un couplage nul entre les comportements radiaux et transverses. Ceci se traduit par des valeurs de coefficients de Poisson nuls dans toutes les directions.
- **Modélisation du bobinage :**
 - Seule une modélisation « multi-blocs » prenant en compte séparément les zones insérées, les têtes de bobines et les cercles de phase est adaptée.
 - Les têtes de bobines naturellement tressées sont modélisées par des volumes annulaires homogènes orthotropes.
 - Les liaisons entre le bobinage et le reste du stator est assuré par une continuité de maillage. Autrement dit, les composants insérés physiquement sont reliés rigidement au reste du modèle.
 - La connaissance des fractions volumiques du cuivre est déterminante pour le calcul des paramètres matériaux orthotropes dans les différentes zones du bobinage. Celle-ci est estimée à dans un intervalle de 60 à 70%.
 - La répartition des masses dans le bobinage est un élément déterminant. Les masses des zones insérées et des extrémités du bobinage doivent être parfaitement maîtrisées.
 - Les propriétés de la partie centrale du bobinage sont également obtenues par la théorie classique d'homogénéisation.
 - Les extrémités du bobinage sont modélisées par de 3 zones distinctes dont les propriétés de raideur sont quasi identiques à celles des isolants qui maintiennent leur cohésion.

Une modélisation respectant ces prescriptions assure une bonne prédiction des premiers modes d'ensemble à basses fréquences de la structure. Ce niveau de prédiction est de l'ordre de 3% en écart fréquentiel relatif et de plus de 77% en MAC. Toutefois cette qualité de prédiction se dégrade au fur et à mesure que les déformées se complexifient. Une attention particulière doit être attribuée aux paramètres de raideurs et de masses des zones de l'empilement de tôles et de l'extrémité du bobinage côté cercles de phases.

En raison :

- du caractère manuel de l'assemblage de la structure et des diverses dispersions de fabrications engendrées notamment celles liées à la quantité de résine d'imprégnation, à la qualité de la découpe des tôles ou à la présence de contraintes résiduelles dans les soudures,
- du choix de cette modélisation en 3D, homogène, orthotrope pour l'empilement feuilleté et en plusieurs blocs distincts pour bobinage, le modèle construit suivant ces règles ne peut être qu'un modèle nominal devant être complété par une étude d'incertitudes et d'analyse de robustesse. Celle-ci fera l'objet du chapitre suivant de ce mémoire.

Chapitre IV

Analyse de robustesse des modèles de moteurs ferroviaires

Dans le domaine de la mécanique, la simulation numérique a pris ces derniers temps une place importante. Bien qu'elle permette aujourd'hui de résoudre des problèmes complexes et d'en donner des solutions, il est légitime voire indispensable de s'interroger sur la validité du modèle construit et de son aptitude à représenter les phénomènes physiques réels. C'est pourquoi, la quantification de la représentativité d'un modèle, notamment en dynamique basses fréquences des structures, reste un problème tout aussi important que le développement des méthodes de résolution numériques.

Pour des problèmes d'assemblages complexes comme c'est le cas pour les moteurs ferroviaires, un modèle numérique, même bien recalé, peut ne pas prendre en compte correctement certains phénomènes. En effet ; plusieurs types d'incertitudes structurales peuvent entacher ce dernier. Nous pouvons citer par exemple l'introduction de dispersions liées aux caractéristiques matérielles de la structure physique, telles que les propriétés mécaniques des résines de polymères, les hypothèses simplificatrices ou les choix de modélisation de certaines parties des assemblages mécaniques notamment les interfaces ou les liaisons, ou bien encore les choix d'approche de modélisation tels que certaines modélisations méso-macro par homogénéisation.

Afin de tenir compte de ces incertitudes, il est nécessaire d'utiliser des méthodes non déterministes.

Autant que les nombreuses sources d'incertitudes, la grande taille des MEF et les grandes quantités de données, viennent s'ajouter comme des problèmes majeurs lors de la phase de conception d'un produit industriel. De la prise en compte des incertitudes dans un tel contexte est donc née la conception robuste. La robustesse d'un modèle est définie comme étant sa capacité à prédire un comportement statique ou dynamique de sorte que les performances de la structure associée soient peu sensibles aux diverses incertitudes pouvant affecter son fonctionnement.

IV.1. Etat de l'art sur la modélisation et la propagation des incertitudes

Selon de nombreux auteurs [73, 88, 99], les incertitudes sont classées selon leur nature en plusieurs types. Néanmoins, nous pouvons en distinguer deux grandes catégories à savoir :

- les incertitudes dites irréductibles et qui sont dues à la variabilité de la structure physique étudiée dans son environnement [99]. Comme leur nom l'indique, leurs effets ne peuvent être que systématiquement subis et pris en compte sans pouvoir les réduire ou les négliger totalement. C'est le cas notamment de la variabilité liée aux propriétés physiques des matériaux (masses, raideurs), des variantes d'assemblages (pressions de maintien, qualité des soudures,...etc.), des variations des conditions environnementales (température,

- hygrométrie)...etc. Bien entendu, ce type d'incertitudes affecte la structure physique étudiée mais également les moyens de mesure (température, vibrations).
- Les incertitudes dites réductibles qui sont dues aux erreurs de diagnostic du bon phénomène régissant la réalité physique d'un phénomène (raccordements entre les différentes zones du bobinage d'un stator) ou au manque de connaissance d'un phénomène physique (lois de comportements de certains matériaux...etc.) ou encore du choix d'une modélisation simplifiée (approximation pour modéliser un phénomène complexe telle que le choix d'une modélisation de l'empilement feuilleté d'un stator par homogénéisation classique). Cette classe d'incertitudes est qualifiée dans la littérature d'épistémique.
- On peut également citer la nuance introduite par Oberkampf *et al.* [99] qui distingue les notions « d'incertitudes » et « d'erreurs » dans le sens où ces dernières sont certes des imprécisions mais elles peuvent être identifiées et corrigées. On en cite par exemple des erreurs humaines involontaires qu'il serait possible d'éliminer (oublis, fautes d'inadvertance dans la construction d'un modèle...etc.) ou même volontaires (simplification de la topologie d'un modèle ou de raffinement de son maillage...etc.). Malgré tout, nous choisissons d'intégrer cette classe parmi celles des incertitudes épistémiques dans la mesure où ces erreurs sont parfois volontaires mais nécessaires ou simplement persistantes malgré tous les efforts de correction. Il est donc plus judicieux de les prendre en compte comme incertitudes épistémiques.

En fonction de leur nature, les formulations théoriques de modélisation et de propagation des incertitudes n'ont cessé de se développer et de s'adapter à ces différentes classes.

Historiquement, les premières approches non-déterministes de modélisation des incertitudes ont été basées sur l'usage des probabilités. Les méthodes, aidées par les développements des moyens numériques, n'ont cessé de s'affiner ces derniers temps. Une discipline a fini par naître, traitant du calcul stochastique en mécanique comme d'un moyen de modéliser toutes les incertitudes du système étudié. Un état de l'art a été donné par Schüeller *et al.* [119], puis mis à jour dans [115].

De manière générale, ces méthodes consistent à étudier les effets des incertitudes affectant les paramètres du modèle sur la variabilité de ses sorties.

Pour calculer la réponse aléatoire d'une structure modélisée par des paramètres incertains, une première technique s'appuie sur le savoir-faire de l'étude déterministe du problème. Ainsi, les méthodes de Monte Carlo permettent de générer des tirages des paramètres aléatoires définissant le modèle selon les lois de probabilité et les fonctions de corrélation supposées. On est alors en présence, pour chaque tirage des paramètres aléatoires, d'une structure déterministe pour laquelle un calcul déterministe de la réponse peut être mené, souvent à travers un Modèle Eléments Finis. Il reste enfin à étudier la statistique de ces réponses pour caractériser la variabilité de la réponse du système stochastique.

Dans la simulation selon les techniques de Monte Carlo, la méthode des éléments finis n'est qu'un moyen de mener le calcul déterministe. C'est dans le but de mieux mêler celle-ci avec le modèle stochastique que s'est développée la méthode des Eléments Finis Stochastiques (SFEM pour Stochastic Finite Elements Method) [119].

Malgré le rôle prédominant joué par les méthodes stochastiques dans la modélisation des incertitudes, certains auteurs ont commencé à les trouver restrictives. En effet ; l'incertitude sur un paramètre peut se définir selon deux schémas différents, comme ceci est décrit par Klir [73] :

- un premier schéma où des valeurs alternatives et distinctes du paramètre, tel lors d'un lancé de dé où l'occurrence d'une valeur exclut les autres, peuvent se produire ; c'est ce que permettent de modéliser les méthodes stochastiques ;
- un second schéma relatif à un ensemble de valeurs alternatives toutes possibles de façon égale. On peut illustrer ceci par la détermination d'une valeur à l'aide d'un appareil de mesure ayant

un intervalle de confiance. Un autre moyen, plus « précis » ne fera que réduire l'intervalle de confiance accordée à la grandeur mesurée et elle se trouvera toujours quelque part dans une sorte de « région minimale d'ignorance ».

Dès lors que le second schéma est présent, une modélisation stochastique entraîne alors une modélisation déformée ou restrictive du problème traité, d'où le recours à des méthodes dites non-stochastiques.

Même si elles ne seront pas traitées dans notre présent travail, nous avons trouvé intéressant de présenter une brève synthèse des principales méthodes non-stochastiques dans l'état de l'art suivant.

IV.1.1. Méthodes stochastiques en dynamique

Les méthodes stochastiques sont les méthodes non-déterministes les plus utilisées en raison du fait qu'elles reposent sur l'utilisation des probabilités qui est introduite naturellement quand il s'agit de modéliser les effets du hasard.

Historiquement trois points de vue sur les probabilités servent encore aujourd'hui dans le choix d'une loi de probabilité :

- une vision basée sur des considérations de symétrie : pour cette vision, lors du lancé d'un dé, la probabilité d'obtenir une face donnée est la même pour les autres faces ;
- une vision « fréquentiste » : se voulant plus objective, elle se base sur le nombre d'occurrences d'apparition d'un événement au cours d'expériences répétées ;
- une vision bayésienne [10] : cette vision, plus subjective, consiste à définir *a priori* la probabilité d'un événement.

Après maturation de ces visions, le travail de [74] a mis clairement les fondations de la théorie des probabilités appliquée à la théorie de la mesure. En mécanique, la discipline du calcul stochastique est née afin de quantifier les effets des incertitudes d'un système donné.

IV.1.1.1. Choix des paramètres stochastiques

IV.1.1.1.1. Types de paramètres

Les types de paramètres que l'on définit dans les modèles stochastiques sont :

- les variables aléatoires, de valeurs réelles, elles sont généralement caractérisées chacune par une densité de probabilité et les unes par rapport aux autres par des fonctions de corrélation ;
- les champs stochastiques, qui sont des fonctions réelles, qui dépendent aussi bien de l'aléa que de l'espace. Ils sont caractérisés par la donnée d'une moyenne et d'une variance dépendant de l'espace et d'une fonction de covariance entre deux points de l'espace ;
- on peut également citer les processus stochastiques, qui sont des fonctions dépendant à la fois de l'aléa et du temps.

Certes avec une manipulation complexe, les champs stochastiques représentent souvent de manière réaliste la variabilité des paramètres incertains. On peut citer l'exemple de la variabilité du module de Young d'une barre modélisée par une variable aléatoire homogène sur toute sa longueur. Cette hypothèse peut s'avérer restrictive lorsqu'une variabilité spatiale est présente. Il est toutefois possible de décomposer un champ stochastique sur une base déterministe dont les coordonnées sont des variables aléatoires. On peut citer la méthode la plus populaire de Karhunen-Loève [83]. Au final, l'analyse d'un champ stochastique se résume à l'étude d'un nombre de variables aléatoires indépendantes, dont la manipulation est plus aisée.

IV.1.1.1.2. Choix et construction des lois de probabilité

On peut citer, comme premières techniques d'attribution des lois de probabilité aux paramètres incertains des méthodes issues des visions, de symétrie, fréquentiste et bayésienne, citées plus haut. Nous pouvons citer également d'autres méthodes connues et largement utilisées telles que :

- La loi de probabilité normale

Très souvent affectée comme loi de probabilité à des variables aléatoires, $X(\theta)$ avec θ représentant l'aléa, elle est définie par rapport à sa densité de probabilité qui s'écrit sous la forme :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (IV.1)$$

où : μ est l'espérance mathématique $\overline{X(\theta)}$ de la variable et $\sigma = \sqrt{[(X(\theta) - \overline{X(\theta)})^2]}$ son écart type.

L'importance de cette loi découle du théorème central limite pouvant s'énoncer sous les conditions de Borel suivantes :

« si les causes de variations aléatoires d'une grandeur expérimentale $X(\theta)$ sont nombreuses et si aucune d'entre elles n'est prépondérante, on peut alors considérer que les différentes valeurs obtenues en répétant la mesure dans des conditions identiques se répartissent suivant une loi normale de Gauss. »

Ceci permet de justifier le fait que des paramètres de structure tels que les raideurs ou les masses sont souvent considérés comme des variables aléatoires de loi normale.

- Le principe du maximum d'entropie

Il s'agit d'une loi pour laquelle on utilise toute l'information disponible et où l'on suppose qu'une incertitude maximale entache tout ce qu'on ne sait pas. Elle se base sur la notion d'entropie d'une variable aléatoire introduite dans [122] permettant de caractériser la quantité d'information manquante d'une variable aléatoire comme suit :

$$S[X(\omega)] = - \int_{D_x} p(x) \ln(p(x)) dx \quad (IV.2)$$

Le principe d'entropie défini par Jaynes [67] permet de choisir la meilleure loi de probabilité sous des contraintes définies.

IV.1.1.1.3. Choix des paramètres pertinents

Lors du traitement statistique des données en validation de modèle, on peut citer une famille de méthodes permettant de déterminer les effets des incertitudes de chacune des variables sur la variabilité de la réponse du système étudié. Ces méthodes permettent ainsi de réduire, parfois de manière considérable, le nombre de variables incertaines mais peu influentes, en déterminant celles qui ont les effets les plus pertinents sur la réponse du système. On peut citer différentes méthodes comme l'analyse de sensibilité [113], la plus répandue et qu'on a d'ailleurs pu utiliser dans le cadre de l'analyse préalable au recalage du modèle des stators étudiés (chapitre III). On peut citer également les méthodes de criblage [32] qui fait partie de la méthode des plans d'expériences numériques.

Dans ce qui suit, nous présentons la manière dont les méthodes stochastiques propagent l'incertitude modélisée par les paramètres stochastiques sur la réponse d'un modèle étudié.

IV.1.1.2. Méthode de Monte Carlo

L'unes des approches les plus répandues pour la propagation des incertitudes stochastiques sont les méthodes de type Monte Carlo, détaillées dans des ouvrages tels que [45, 55, 112]. Il s'agit d'une approche statistique qui permet l'évaluation des caractéristiques stochastiques de la réponse d'un système via le calcul d'un grand nombre de problèmes déterministes. Elle consiste à générer des tirages, tenant compte des lois de probabilité introduites et des fonctions de corrélation entre les variables. Ainsi à chaque tirage d'un jeu de paramètres aléatoires, est associée une structure modifiée pour laquelle une réponse déterministe est calculée. Une étude statistique des réponses s'en suit, dont la quantité est par ailleurs très importante, ce qui permet d'en déterminer les premiers moments statistiques (moyenne, écart type). Plus le nombre de réalisations est élevé et plus la justesse des résultats du traitement statistique s'en voit améliorée.

IV.1.1.2.1. Atouts et inconvénients

Le principal atout de ces méthodes est de permettre de réaliser de manière successive plusieurs calculs déterministes correspondant à des structures dont les valeurs des paramètres d'entrée ont été tirées aléatoirement. Il suffit alors de coupler à un logiciel de calcul (NASTRAN dans notre cas) la méthode pour obtenir autant de réponses que de calculs déterministes réalisés.

Toutefois, c'est justement la question du nombre de tirages qui détermine la convergence de la méthode et constitue son principal défaut. En effet, en nous basant sur le **théorème central limite**, si on cherche à estimer l'espérance d'une variable aléatoire $X(\theta)$, les méthodes de Monte Carlo peuvent estimer, pour n tirages, cette espérance, à l'aide de n variables aléatoires indépendantes $\{X_k(\theta)\}_{k=1..n}$ de même loi de probabilité que $X(\theta)$. On peut montrer alors que l'écart entre l'espérance de $X(\theta)$ et sa variable estimée par les méthodes Monte Carlo s'écrit:

$$e_n = \overline{X(\theta)} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k(\theta) \quad (IV.3)$$

et suit une loi normale d'écart type σ/\sqrt{n} , avec σ l'écart type de la variable aléatoire $X(\theta)$. On remarque donc que la méthode de Monte Carlo converge avec une tendance en $1/\sqrt{n}$. Le nombre de tirages à la convergence peut donc être considérable suivant l'étude menée et le nombre de paramètres mis en jeu.

Nous présentons quelques techniques numériques qui réduisent cet inconvénient.

IV.1.1.2.2. Variantes améliorées

Outre la possibilité de réalisation d'une méthode Monte Carlo avec des moyens de calcul puissants, notamment son implémentation informatique sur plusieurs processeurs en parallèle tels que proposée par Papadrakakis et Papadopoulos [100], nous pouvons citer également :

- **La méthode des tirages d'importances (Importance Sampling)** [132], qui permettent d'accélérer la convergence de la méthode en augmentant la densité des réalisations dans les régions d'intérêt qui contribuent le plus à l'estimation désirée. La principale limitation de cette méthode est le nombre de variables aléatoires indépendantes. En effet ; au-delà de 10, la méthode n'est plus rentable en termes de coûts de calculs par rapport à une méthode Monte Carlo classique.
- **Les Métamodèles**, dont le principe est de réduire le temps de calcul d'une méthode Monte Carlo en « réduisant » directement le modèle initial par un modèle de substitution. Celui-ci

est basé sur une surface approchée des réponses des modèles qui auraient été calculées par une méthode Monte Carlo classique. On parle alors de Méthodes de Surfaces de Réponses (*Response Surface Methods*) et de *Métamodèles* [135]. La réponse du modèle déterministe est d'abord calculée pour différents jeux de paramètres afin d'obtenir suffisamment de points de réponse afin de les interpoler par une régression [56, 118]. La limitation de cette méthode reste le nombre de paramètres indépendants qui y sont mis en jeu. Une étape préliminaire consiste à en sélectionner les plus influents.

- **Méthode du Latin Hypercube.** Cette technique introduite par McKay dans [87] est très employée car elle permet de réduire nettement le nombre de tirages N minimal pour la convergence. Le domaine de définition de chaque variable aléatoire est divisé en N intervalles d'égales probabilités. Les N valeurs tirées pour la première variable aléatoire sont appariées avec les N valeurs tirées respectivement pour les p variables, formant ainsi N p -uplets de variables aléatoires qui correspondent aux N jeux de paramètres du tirage. Cette méthode est donc plus efficace dans le choix des jeux de valeurs du tirage et garantit une répartition plus homogène de l'espace des valeurs probables des paramètres. C'est cette méthode d'ailleurs qui sera utilisée au cours de ce travail.

IV.1.1.3. Eléments finis stochastiques

En mécanique, particulièrement dans le domaine de la dynamique des structures, les calculs déterministes réalisés pour des jeux de paramètres tirés aléatoirement font souvent intervenir une discrétisation spatiale du problème éléments finis. On est donc de fait, bien qu'indirectement, en présence d'une Méthode d'Eléments Finis Stochastiques (MEFS).

L'idée de la MEFS est de considérer l'aléa comme une dimension du problème combinée à la dimension de la discrétisation spatiale introduite par la méthode des Eléments Finis. Cette façon de mêler les deux dimensions peut être traitée par les visions suivantes.

IV.1.1.3.1. Méthode des Eléments Finis Stochastiques par Perturbations

Cette méthode introduit une perturbation entre les paramètres incertains et les caractéristiques de la réponse aléatoire [3].

La première étape consiste à discrétiser spatialement les champs stochastiques utilisés. Pour cela nous pouvons citer la discrétisation au milieu de l'élément [123] consistant en la manière la plus simple de procéder, la discrétisation par moyenne locale [134], la discrétisation par intégrales pondérées [130].

La seconde étape consiste à approximer les fonctions des variables aléatoires par leur développement en série de Taylor autour de leur valeur moyenne, souvent à l'ordre un ou deux en supposant que les paramètres varient peu autour de leur valeur moyenne.

IV.1.1.3.2. Méthode Spectrale des Eléments Finis Stochastiques

Cette méthode utilise une « projection sur le chaos polynomial » de la partie aléatoire de la réponse recherchée en association avec une décomposition de Karhunen Loève des paramètres incertains du modèle [50].

IV.1.1.3.3. Méthodes Fiabilistes

Ces méthodes s'attachent à déterminer la probabilité de défaillance d'une structure dans des cas où une simulation directe de Monte Carlo serait difficile à mettre en œuvre notamment pour estimer la fonction de performance associée à cette défaillance [37].

IV.1.1.3.4. Méthode Non-Paramétrique

Dans toutes les méthodes stochastiques que nous avons évoquées précédemment, la sélection des paramètres incertains, à savoir le type de données (variables aléatoires et champs stochastiques) et les lois de probabilité qui leur sont associées, est une étape cruciale. Dans ces cas, on suppose que les choix de modélisations sont parfaitement connus et que les incertitudes portent uniquement sur les paramètres du modèle construit. Or souvent pour des systèmes mécaniques ou assemblages complexes, cette hypothèse est discutable. Certaines hypothèses de modélisation ne vont souvent pas suffisamment dans le détail de la complexité des phénomènes réels tels que ceux liés aux interfaces. Ces dernières sont souvent simplifiées volontairement ou pas. C'est dans cette mesure que l'approche non-paramétrique prend en compte ce type d'erreurs liées au modèle et à la modélisation.

Pour l'instant, peu de travaux s'intéressent à ce type d'incertitudes. Soize en 1986 [126] commence par introduire cette approche au début dans une logique de flou structural qu'il définit comme l'ensemble des sous-systèmes mécaniques « entourant » un système maître, et qui généralement sont difficilement modélisables telle que dans les domaines du génie civil. Cette première vision ne s'inscrivait pas dans une étude de la variabilité des réponses mais plutôt dans le sens de l'amélioration de la prédiction déterministe des réponses dans la zone des moyennes fréquences ou de la quantification de l'amortissement en basses fréquences [127]. Cette approche prend en compte les lois de probabilité à des quantités globales telles que les impédances aux frontières entre le système maître et ce qui l'entoure.

Dans [128], l'approche non-paramétrique est proposée cette fois-ci par Soize pour prendre en compte les incertitudes de modélisation et d'étudier leurs effets sur la variabilité des réponses. Les incertitudes sont prises en compte de manière globale en remplaçant directement les matrices du modèle par des matrices aléatoires contraintes à respecter des propriétés de définie positivité et une convergence autour des matrices nominales. Cette approche est basée sur le principe du maximum d'entropie.

Nous exposons dans ce qui suit le schéma de déroulement de la méthode non-paramétrique.

Nous nous intéressons aux vibrations linéaires d'une structure faiblement amortie autour d'une configuration d'équilibre statique sans aucune précontrainte. Nous nous restreignons au domaine des basses fréquences. Pour toute pulsation ω dans la bande fréquentielle considérée, l'équation du modèle matriciel moyen, appelé aussi modèle nominal, s'écrit :

$$(-\omega^2 M_0 + K_0) y_0(\omega) = f(\omega) \quad (IV.4)$$

où : $y_0(\omega)$ et $f(\omega)$ sont respectivement les vecteurs, appartenant à \mathbf{C}^N , des ddls et des forces externes. M_0 , K_0 sont respectivement les matrices de masse et de raideur du modèle nominal. Elles sont réelles, symétriques et définies positives. On désigne dans ce qui suit les variables M et K relatives aux matrices de masse et de raideur par la notation générique A .

Dans la modélisation non-paramétrique, l'information principale et le point de départ sont le modèle matriciel moyen. L'utilisation de l'approche stochastique non-paramétrique consiste à remplacer les matrices de ce modèle nominal par les matrices réelles aléatoires $A(\theta)$, ayant les mêmes propriétés de symétrie et de définie positivité que les matrices nominales. Ces matrices vérifient donc :

$$E\{A(\theta)\} = A_0 \quad (IV.5)$$

où $E\{\cdot\}$ est l'espérance mathématique. De plus, la relation liée aux moments du second ordre des variables aléatoires $[A(\theta)]^{-1}$ suivante est introduite:

$$E\left\{\left\| [A(\theta)]^{-1} \right\|_F^2\right\} < +\infty, \quad (IV.6)$$

où : $\|\cdot\|_F^2$ est la norme de Frobenius au carré, définie par : $\|A\|_F^2 = \text{tr}(A \cdot A^T)$ avec $\text{tr}(\cdot)$ la trace d'une matrice donnée.

A_0 est une matrice réelle symétrique définie positive et peut donc être écrite selon la factorisation de *Cholesky* selon la forme suivante :

$$A_0 = L_A^T L_A \quad (IV.7)$$

où : L_A est une matrice triangulaire supérieure.

Remplacer la matrice nominale A_0 par une matrice aléatoire se fait en introduisant la matrice aléatoire $G_A(\theta)$ symétrique définie positive telle que :

$$A(\theta) = L_A^T G_A(\theta) L_A \quad (IV.8)$$

Ce qui donne à la matrice G_A la propriété suivante:

$$E\{G_A(\theta)\} = I_N \quad (IV.9)$$

où: I_N est la matrice identité de même taille N que A_0 .

Considérons le paramètre réel $\delta_A > 0$ défini par :

$$\delta_A = \left\{ \frac{E\left\{\left\| G_A - E\{G_A\} \right\|_F^2\right\}}{\left\| E\{G_A\} \right\|_F^2} \right\}^{1/2} \quad (IV.10)$$

Ce paramètre permet de définir la dispersion du modèle de probabilité de la matrice aléatoire $A(\theta)$. Pour un entier $N \geq n_0 \geq 1$ donné, la dispersion du modèle de probabilité est définie par le paramètre δ_A , indépendamment de la taille de A_0 . Ce paramètre doit vérifier la condition suivante :

$$0 < \delta_A < \sqrt{(n_0 + 1)/(n_0 + 5)}. \quad (IV.11)$$

Cette borne supérieure se justifie théoriquement pour que l'équation (IV.11) soit vérifiée et ne représente pas une réelle limitation pour les applications de la méthode car en général, les tailles N des modèles utilisés sont souvent supérieures à 100 voir à 1000.

A titre d'exemple et pour un modèle de taille N supérieure à 10, n_0 peut être choisi égal à 10 et à ce moment là la borne supérieure admissible des valeurs de δ_A est égale à 0.85, ce qui représente un niveau très élevé d'incertitudes, niveau qui n'est quasiment jamais atteint en pratique. Il est d'usage de considérer que des niveaux inférieurs à 0.1 sont faibles. A partir d'une valeur de dispersion de 0.2, les dispersions sont considérées comme importantes.

La probabilité P_{G_A} de la distribution de la matrice aléatoire $G_A(\theta)$ est ensuite définie par une fonction de densité de probabilité sur l'espace des matrices réelles, symétriques et définie-positives et à valeurs dans \mathfrak{R}^+ . Cette probabilité est donnée en fonction du volume élémentaire de l'espace des matrices réelles symétriques de taille N qu'on définit par :

$$\tilde{d}G_A = 2^{NA(NA-1)} \prod_{1 \leq i \leq j \leq NA} dG_{ij} \quad (\text{IV.12})$$

On a donc $P_{G_A} = p_{G_A}(G_A) \tilde{d}G_A$ qui vérifie la condition de normalisation suivante :

$$\int_{M^+(\mathfrak{R})} p_{G_A}(G) \tilde{d}G = 1, \text{ avec } M^+(\mathfrak{R}) \text{ l'ensemble des matrices réelles, symétriques et définie-positives.}$$

Cette fonction de densité de probabilité de la matrice aléatoire est donnée par :

$$p_G = \mathbf{1}_{M^+(\mathfrak{R})}(G_A) \times C_{G_A} \times [\det(G_A)]^{(1-\delta_A^2)/(2\delta_A^2)^{-1}(NA+1)} \times \exp[-(N+1)(2\delta_A^2)^{-1} \text{tr}(G_A)] \quad (\text{IV.13})$$

où : $\mathbf{1}_{M^+(\mathfrak{R})}$ représente la fonction indicatrice de l'ensemble des matrices réelles, symétriques et définie positives de taille N , $\det(*)$ est le déterminant d'une matrice et C_{G_A} est une constante positive définie par :

$$C_{G_A} = \frac{(2\pi)^{-N(N-1)/4} [(N+1)/2\delta_A^2]^{N(N+1)(2\delta_A^2)^{-1}}}{\prod_{j=1}^N \Gamma[(N+1)/2\delta_A^2 + (1-j)/2]} \quad (\text{IV.14})$$

dans lequel $\Gamma(z)$ est la fonction *gamma* définie pour tout réel positif z par :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \exp(-t) dt \quad (\text{IV.15})$$

La représentation algébrique de la matrice aléatoire $G_A(\theta)$, réelle, symétrique définie-positive suivante, permet de définir et ainsi programmer une procédure de simulation numérique de type Monte Carlo. La matrice $G_A(\theta)$ est d'abord écrite sous la forme :

$$G_A = L_{G_A}^T L_{G_A} \quad (\text{IV.16})$$

dans laquelle L_{G_A} est une matrice aléatoire triangulaire supérieure issue de la factorisation de *Cholesky* de G_A de telle sorte que :

- les variables aléatoires $\{L_{G_A,ij}, i \leq j\}$ sont indépendantes;
- pour $i \leq j$, la variable aléatoire réelle $L_{G_A,ij}$ peut être écrite sous la forme: $L_{G_A,ij} = \sigma_N U_{ij}$ dans laquelle $\sigma_N = \delta_A(N+1)^{-1/2}$ et U_{ij} est une variable aléatoire réelle de loi de probabilité normale, de moyenne nulle et de variance égale à 1 ;
- pour $i = j$, la variable aléatoire réelle positive $L_{G_A,ij}$ peut être écrite sous la forme : $L_{G_A,ij} = \sigma_N \sqrt{2V_j}$ dans laquelle V_j est une variable aléatoire réelle dont la distribution est

définie par la fonction *gamma* et dont la fonction de densité de probabilité $p_{V_j}(v)$ est définie par :

$$p_{V_j}(v) = 1_{\mathbb{R}^+}(v) \frac{1}{\Gamma(\alpha_{N,j})} v^{\alpha_{N,j}-1} \exp(-v), \quad \alpha_{N,j} = \frac{N+1}{2\delta_A^2} + \frac{1-j}{2} \quad (\text{IV.17})$$

Comme application de la méthode, nous pouvons citer les travaux de Chebli dans [27] qui a couplé la méthode non-paramétrique avec l'approche de sous-structuration dynamique de Craig-Bampton [30] où un niveau de dispersion différent est affecté à chaque sous-domaine.

Le principal inconvénient de la méthode non-paramétrique réside dans l'interprétation physique des niveaux de dispersion qui y sont appliqués *a priori*. En effet, si la méthode ne se focalise certes pas sur la variabilité des paramètres (module de Young ou densité...etc.), elle introduit néanmoins une dispersion de manière globale sur les matrices constitutives du MEF. Le niveau introduit reste un paramètre « purement numérique » dans le sens où il est difficile de le rattacher à une dispersion « physique ou palpable » au sens de l'ingénieur. C'est pour pallier à ce problème entre autres que s'inscrit le travail de Capiez-Lernout *et al.* [22] où une technique basée sur les densités de probabilités des variations d'origine non-paramétrique et d'autres d'origine paramétrique, sont corrélées. Un lien est ensuite établi entre les niveaux de dispersion non-paramétriques et les variations « plus concrètes » des paramètres incertains du modèle.

Nous discuterons de la mise en œuvre de cette méthode et de sa pertinence au paragraphe IV.3.4.

Compte tenue de son originalité dans la prise en compte des incertitudes de modélisation et de son efficacité prouvée, nous avons choisi d'utiliser la méthode non-paramétrique dans notre travail, couplée à une approche de type « paramétrique ».

Comme évoquée précédemment, la propagation d'incertitudes par simulation de type Monte Carlo engendre des temps de calcul importants, *a fortiori* lorsqu'il s'agit de manipuler des MEF de grandes tailles et complexes de surcroît, comme cela est le cas pour les modèles de stators ferroviaires que nous avons eu l'occasion de présenter au chapitre III. C'est pourquoi l'approche de modélisation et de propagation des incertitudes se fera dans un contexte de réduction de modèle, particulièrement de sous-structuration plus adaptée aux structures industrielles assemblées. De fait, des erreurs supplémentaires dues à la réduction sont introduites, notamment lorsque les niveaux de dispersion introduits sont élevés. C'est ce que nous proposerons de minimiser en étudiant et en améliorant la robustesse des bases de réduction choisies.

Remarquons par ailleurs que la difficulté d'utilisation de la méthode non-paramétrique en réduction de modèle réside dans son atout principal. En effet ; le type de variations qu'elle introduit affecte de manière globale tous les ddls des matrices constitutives d'un système donné, ou d'un de ses sous-ensembles, contrairement à une approche de type « paramétrique » où les variations sont localisées à certains ddls liés aux paramètres en question. Les perturbations introduites sont par conséquent globales. La robustesse des bases de réduction utilisées se voient alors sévèrement mise à l'épreuve. C'est dans cette mesure que le choix d'une base de réduction adaptée est crucial et fait l'objet de la suite de notre travail. Nous développerons plus en détail ces points dans les paragraphes suivants.

IV.1.1.4. Bilan sur les méthodes stochastiques et démarche retenue

Nous retenons que dans une phase de conception industrielle, les incertitudes sont introduites pour prendre en compte la méconnaissance de certaines variables de conception. Les méthodes stochastiques sont les plus souvent utilisées pour modéliser et propager l'effet de ces méconnaissances sur la variabilité de la réponse du système. Ces méthodes se basent sur les concepts suivants :

- **paramètre incertain.** Il s'agit d'un paramètre non déterministe caractérisé par une valeur nominale et une incertitude,

- **modèle nominal.** Il s'agit d'un modèle dans lequel les matrices constitutives sont fixées à leurs valeurs nominales. Dans l'approche paramétrique, cela revient à fixer les paramètres incertains à leurs valeurs nominales,
- **modèle aléatoire.** Il s'agit du modèle dans lequel les valeurs des paramètres sont choisies de manière aléatoire, suivant une loi de probabilité définie.

Bien qu'il n'existe pas un seul type d'incertitudes, on en distinguera néanmoins deux grandes catégories :

– **les incertitudes réductibles ou épistémiques** qui résultent d'un manque de connaissances des mécanismes mis en jeu et peuvent donc être diminuées par une augmentation de la quantité d'information. Elles interviennent par exemple lors d'une méconnaissance des relations de comportement des matériaux ou encore des phénomènes intervenant aux liaisons entre sous-structures.

– **les incertitudes irréductibles** qui sont dues à la variabilité intrinsèque du système étudié et de son environnement [99]. Elles résultent par exemple de la variabilité des propriétés matériaux, de la variabilité dans l'assemblage des composantes, *etc.*

Dans le cadre de l'approche stochastique, diverses modélisations sont proposées. Nous citons notamment les approches :

- **paramétriques** telles que les méthodes des Eléments Finis Stochastiques, Spectrale, Fiabilistes ou par Perturbations. Nous retiendrons l'approche de ces dernières,
- **non-paramétrique** où les incertitudes sont introduites directement sur les matrices globales du modèle à travers un paramètre de dispersion.

L'approche de modélisation des incertitudes que nous retenons consiste à représenter un système mécanique à l'aide d'un MEF déterministe. À une entrée correspond une unique réponse déterministe. La modélisation stochastique permet de prendre en compte les incertitudes dans la structure du modèle. À une entrée correspond une réponse aléatoire. Les incertitudes sont introduites dans le modèle dans ce travail soit par une approche paramétrique par perturbations, et/ou par une approche non-paramétrique [2, 22, 28, 128, 129]. Nous proposons dans ce travail de mettre en œuvre les deux méthodes à travers une approche hybride pour propager les incertitudes irréductibles et épistémiques de manière générale.

Les approches paramétriques sont aujourd'hui utilisées pour de nombreuses applications telles que le calcul aux valeurs propres aléatoires, l'analyse de dynamique transitoire de systèmes stochastiques, le calcul de fiabilité, ...etc.

Les principales étapes de l'approche paramétrique sont les suivantes :

- Identifications des paramètres locaux incertains du modèle, tels que le module de Young ou la densité massique.
- Construction d'une modélisation probabiliste appropriée de ces paramètres. Les paramètres sont modélisés soit par des variables aléatoires, soit par des champs stochastiques. C'est une étape primordiale de l'approche paramétrique. De nombreux modèles ont été proposés (gaussiens ou non gaussiens).
- Définition de la relation entre les paramètres incertains et l'espace des matrices du modèle éléments finis aléatoire.
- Implémentation d'une méthode efficace afin de résoudre les équations ainsi obtenues en présence de matrices aléatoires. Cette démarche fait appel à plusieurs outils tels que la simulation numérique de Monte Carlo, les méthodes de traitement statistiques des données...etc.

L'approche non-paramétrique est utilisée quant à elle lorsque les paramètres incertains ne sont pas directement modélisés par des variables aléatoires ou des champs stochastiques.

L'application de cette approche en dynamique des structures présente deux limitations importantes :

- D'une manière générale, il est difficile d'estimer réellement un niveau de perturbation non-paramétrique pour un phénomène incertain.
- Le modèle aléatoire étant théoriquement basé sur des matrices symétriques définies positives ne permet pas de traiter des problèmes non auto-adjoints en dynamique des rotors (matrices gyroscopiques antisymétriques). Un traitement préalable est nécessaire pour factoriser la matrice antisymétrique des effets gyroscopiques.

La méthode non-paramétrique présente cela dit l'avantage d'être plus adaptée pour prendre en compte les incertitudes de modélisation.

Dans un cadre plus global de conception robuste, la prise en compte de la robustesse des solutions est essentielle dans la recherche d'une conception optimale. En effet ; une solution déterministe théoriquement acceptable peut s'avérer très instable en pratique si les erreurs commises lors de la fabrication ou de la modélisation ne sont pas correctement prises en compte. Une faible variation par rapport à leur valeur nominale obtenue par voie déterministe peut se traduire par un comportement très dispersé.

IV.1.2. Généralités sur les méthodes non-stochastiques

Bien que leur étude ne fasse pas l'objet de notre travail, nous avons jugé utile d'évoquer brièvement différentes méthodes modélisant les incertitudes par des techniques n'employant pas la théorie des probabilités. Ces approches, qui soit étendent à un niveau supérieur, soit proposent une vision totalement différente des méthodes stochastiques, sont classiquement regroupées dans ce que l'on appelle la théorie généralisée de l'information [73] (Klir).

On ne peut nier en effet le rôle prédominant joué par les méthodes stochastiques dans la modélisation des incertitudes. Cependant, certains auteurs se sont peu à peu posé la question des limitations de l'utilisation de telles approches qui peuvent être restrictives. Le développement des concepts mathématiques aidant, certains auteurs se sont mis à imaginer d'autres voies. En effet, associer une vision probabiliste à tout problème de quantification des incertitudes peut être exagéré dans certains cas. Ainsi, dans [148], les auteurs ont mis en évidence que les méthodes stochastiques pouvaient être mises en défaut sur un exemple de non-linéarité forte, à savoir un système masse-ressort à un degré de liberté pour lequel la relation de comportement du ressort exprime l'effort comme une fonction cubique du déplacement. Sans rentrer dans les détails de l'exemple, il a été montré que le comportement du système rend l'approximation de la réponse par un métamodèle impossible car la surface de réponse présente un caractère fractal ; deux tirages de Monte Carlo de valeurs très proches peuvent donner deux réponses d'amplitudes très éloignées.

Comme nous l'avons déjà évoqué précédemment, on peut considérer que l'incertitude à propos d'une grandeur physique se présente selon deux schémas différents selon Klir [73] à savoir un schéma conflictuel, où des valeurs alternatives et distinctes du paramètre peuvent se produire (exemple du lancé du dé) et pour laquelle la théorie des probabilités est tout à fait adaptée, et un schéma de non-spécificité, relatif à un ensemble de valeurs alternatives toutes possibles de façon égale (exemple d'une mesure avec un appareil auquel est associé un intervalle de confiance).

Dès lors que le deuxième schéma doit être pris en compte, une approche probabiliste n'est plus adaptée, d'où le recours aux méthodes dites non-stochastiques.

Nous citons, dans ce cadre:

- La théorie généralisée de l'information [73] dont la logique est de considérer que le concept de l'information représente une réduction potentielle de l'incertitude. L'idée est née à partir des travaux de Shannon [122] qui ont défini l'information comme une mesure statistique d'une loi de

probabilité. D'ailleurs, il va ainsi de la notion d'entropie définie précédemment. Les concepts se sont développés au cours des années soixante jusqu'au travail de « rassemblement » de celles-ci paru dans [73].

- La théorie des intervalles où les paramètres sont bornés par des intervalles déterministes [35, 93] ou aléatoires [33, 121]. Ce dernier cas s'intègre dans le cadre de la théorie des preuves ou *evidence theory*. Cette théorie utilise une mesure de croyance (consistant en la somme des preuves en faveur de l'occurrence d'un événement) et de plausibilité (consistant en le complément de la somme des preuves qui vont à l'encontre de l'occurrence de l'événement) afin de définir les bornes d'un événement [105] ;
- La théorie des ensembles flous [88, 152] qui permet de modéliser les incertitudes en utilisant des données subjectives. Une fonction d'appartenance permet d'associer à un nombre flou – le paramètre incertain – borné par un support, un degré d'appartenance compris entre 0 et 1. De la valeur du degré d'appartenance va dépendre le jugement sur l'incertitude du paramètre. À partir de cette théorie, a aussi été développée la théorie des possibilités [39, 151]. Dans un formalisme proche de la théorie des croyances, cette approche utilise une mesure de possibilité pour décrire l'occurrence d'un événement et une mesure de nécessité pour indiquer le degré auquel l'occurrence d'un événement est attendue ;
- L'approche convexe ou *info-gap* [13] détaillée dans les travaux de Ben Haim, où un écart entre ce qui est connu et l'information requise pour satisfaire un critère de conception donné est définie. Cette approche, appliquée pour des cas où l'incertitude est prédominante, a pour logique d'assister le décideur à trouver une solution satisfaisante plutôt qu'une solution optimale.
- La théorie des méconnaissances [75, 105] où à chaque sous-ensemble incertain d'une structure est associée une variable interne contenue dans un intervalle dont les bornes sont stochastiques.

IV.2. Réduction de modèle pour l'analyse de robustesse

Comme nous l'avons indiqué au paragraphe IV.1.1.4, notre choix pour la propagation des incertitudes revient en définitive, que ce soit avec la méthode paramétrique ou non-paramétrique, à étudier les effets de modifications (ou perturbations) sur les réponses du modèle. La propagation des incertitudes consiste alors en une étude de réanalyse. Par conséquent; d'un point de vue pratique, notre travail se base sur l'équivalence entre les notions de « présence d'incertitude » et de « perturbation ». Même si le concept de « présence d'incertitude » a un sens spécifique, les outils que nous utilisons pour le traduire et le propager sont les mêmes que ceux d'une étude de perturbation. La spécificité des « perturbations » introduites dans notre travail dépendent bien évidemment des formulations mathématiques des modèles paramétrique et non-paramétrique des incertitudes.

IV.2.1. Réanalyse approchée

Lors de l'évaluation des paramètres modaux d'une structure qui subit une modification quelconque sur ses matrices généralisées, la problématique du coût de calcul se pose rapidement. Même si une réanalyse exacte reste la seule référence, elle est souvent remplacée par une réanalyse approchée au prix d'une erreur. En effet ; l'idée de la réanalyse approchée consiste à approximer les réponses de la structure modifiée en se basant sur les solutions du modèle nominal, calculées une fois.

Une revue des principales méthodes de réanalyse approchée peut être trouvée dans [143].

Plusieurs stratégies existent et nous citons parmi elles les formulations faisant intervenir une analyse des perturbations par sensibilité, les formulations basées sur les réductions de modèles ou celles basées sur des métamodèles. Dans la première stratégie, les dérivées des paramètres modaux par rapport aux

modifications introduites sont calculées suivant un développement en série de Taylor, le plus souvent au premier ordre [9,117]. Cette façon de procéder par linéarisation du problème permet de prédire uniquement les effets de petites modifications. Pour le reste, le traitement du problème de réanalyse approchée est souvent abordé dans un contexte de réductions de modèles.

Dans ce qui suit, nous abordons la notion de robustesse des bases de réduction d'un MEF par rapport à des perturbations qui peuvent être d'origine paramétrique ou/et non-paramétrique.

L'idée est de construire une base de réduction permettant de prédire correctement le comportement du modèle modifié tout en assurant des réanalyses approchées avec des coûts de calculs raisonnables en phase de conception. On imagine très bien l'intérêt de disposer d'une telle base dans le cadre de la propagation des incertitudes par une approche stochastique, tel ce qui est présenté dans cette étude, mais également dans un cadre général lors d'études d'optimisation. Nous pouvons en effet envisager l'étude des incertitudes aussi bien dans un objectif de prévention, qui consisterait à étudier les MEF par des approches probabilistes à défaut d'en maîtriser totalement le comportement déterministe, mais également dans un objectif d'amélioration des hypothèses des MEF en localisant leurs principales sources d'incertitudes.

Nous pouvons illustrer, Fig IV.1, un schéma de déroulement d'une phase de conception.

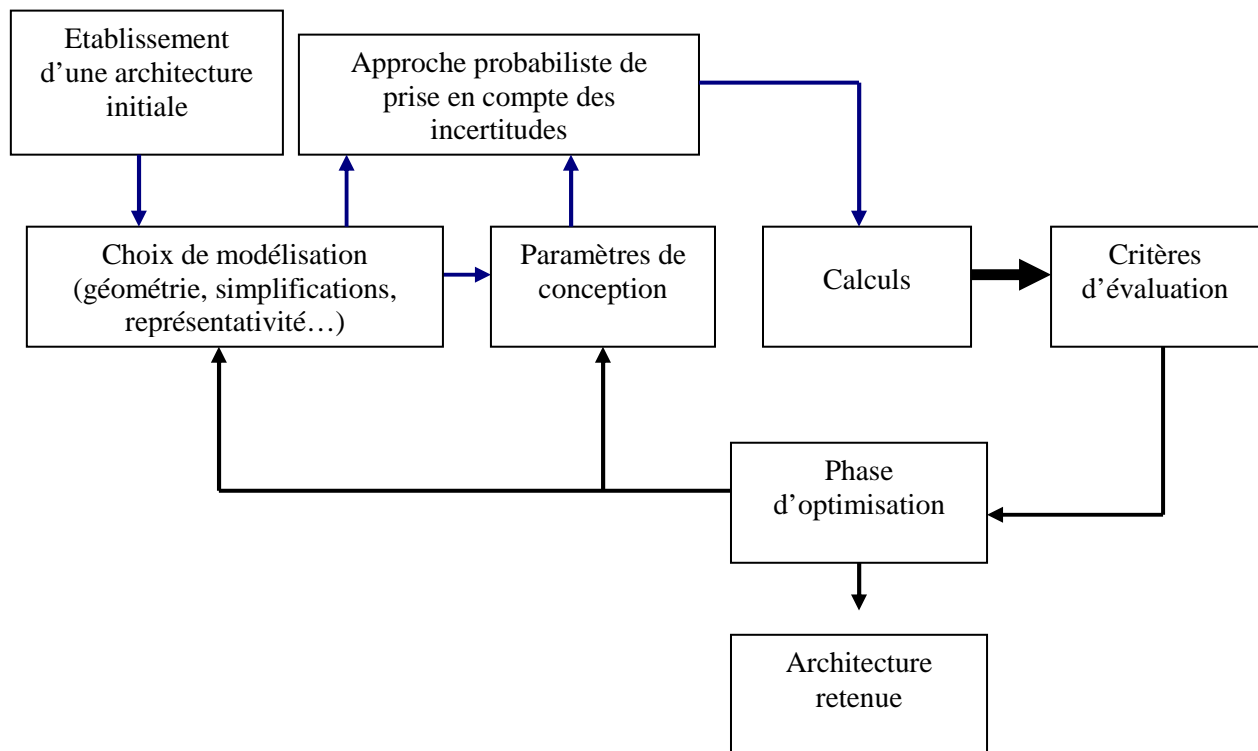


Fig IV. 1: Schéma de déroulement d'une phase de conception

L'utilisation d'une réanalyse approchée sur des modèles réduits, pose logiquement la question de la robustesse des bases de réduction et par conséquent celle de la précision du calcul. C'est pourquoi, nous nous intéressons dans la suite de ce travail à des méthodes de construction de bases robustes, adaptées aux types de perturbations que nous introduisons (paramétriques ou/et non-paramétriques). En raison de leur large utilisation dans l'industrie, nous nous intéressons particulièrement au cas de la réduction de modèles par sous-structuration.

IV.2.2. Réduction de modèles par sous-structuration

Les méthodes de sous-structuration font partie des grandes familles des méthodes de synthèse modale basées sur la méthode de Rayleigh-Ritz. Parmi ces familles de méthodes nous pouvons citer celles basées sur la condensation de la structure exacte sur des ddls physiques ainsi que celles utilisant les coordonnées généralisées. La première consiste à subdiviser le MEF en ddls maîtres et esclaves, ces derniers sont ensuite réduits par condensation statique ou dynamique. La deuxième consiste à réduire le système d'équation régissant la dynamique du modèle en utilisant une base tronquée de vecteurs satisfaisant les conditions aux limites.

L'objectif des méthodes de sous-structuration est de permettre de calculer le comportement dynamique d'une structure à partir de la connaissance du comportement dynamique de ses « sous-structures » et par conséquent de manipuler des MEF de tailles réduites. Ces sous-structures sont analysées et réduites séparément et ensuite couplées entre elles. La gestion des contraintes aux interfaces consiste en la principale difficulté et point de divergence entre les différentes méthodes. En plus de permettre la réduction des tailles des MEF, les méthodes de sous-structuration sont largement présentes dans l'industrie car elles présentent un aspect pratique intéressant à savoir subdiviser le modèle d'une structure en petites zones d'intérêt et de difficultés différentes.

Les méthodes de sous-structuration diffèrent sur:

- le choix de la base de réduction et du vecteur des ddls de réduction manipulés,
- la technique d'assemblage des sous-structures entre elles.

Les principales sources d'erreur proviennent de :

- l'utilisation des bases de Ritz incomplètes,
- le choix des raccordements ou des interfaces, en effet, l'égalité des déplacements et l'équilibre des forces ne sont vérifiés qu'en ces nœuds. Cette étape est par conséquent déterminante.

Dans la suite de cet exposé, nous commençons par présenter les notations généralement rencontrées dans les méthodes de sous-structuration. Ensuite, trois types de modes sont définis : les modes contraints, les modes d'attache et les modes normaux. Enfin quelques méthodes de sous-structuration sont exposées.

Nous serons amenés à répartir les ddls d'une sous-structure en :

- ddls de jonction ou d'interface, désignés par l'indice j , (Fig. IV.2)
- ddls internes, désignés par l'indice i , complémentaires aux ddls de jonction, (Fig. IV.2)
- ddls maîtres, désignés par l'indice m , comprenant les ddls de jonction et certains ddls internes,
- ddls esclaves, désignés par sl , complémentaires aux ddls maîtres,
- ddls de corps rigide, désignés par l'indice r , ($r \leq 6$), regroupant les ddls permettant de rendre isostatique une structure ayant des modes de corps rigide,
- ddls de corps déformable, désignés par l'indice d , complémentaires aux de ddls de corps rigide.

Pour chaque sous-structure, les ddls du vecteur de déplacement y_s sont classés en ddls de jonction

y_j et ddls internes y_i tels que :

$$\{y_s\} = \begin{Bmatrix} y_j \\ y_i \end{Bmatrix} \quad (IV.18)$$

Il en est de même pour les matrices de masse et de raideur du MEF étudié qui s'écrivent:

$$M_s = \begin{bmatrix} M_{jj} & M_{ji} \\ M_{ij} & M_{ii} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad K_s = \begin{bmatrix} K_{jj} & K_{ji} \\ K_{ij} & K_{ii} \end{bmatrix} \quad (IV.19)$$

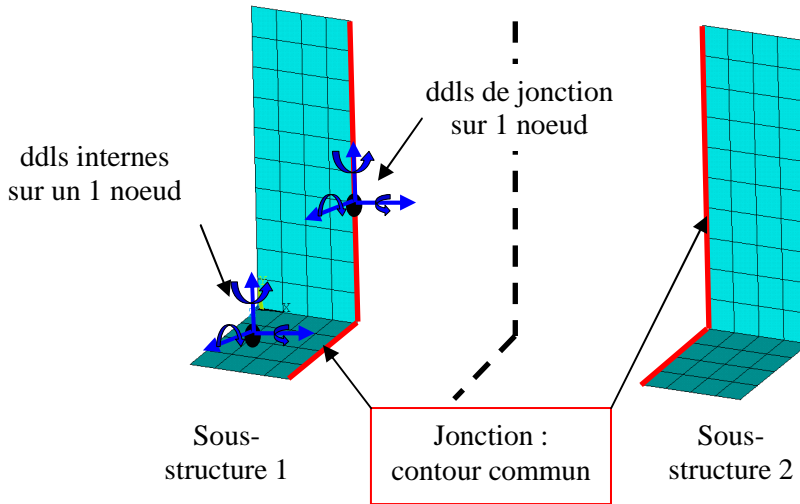


Fig IV. 2: illustration des ddl internes et de jonction

IV.2.2.1. Types de modes utilisés pour la construction des bases de réduction

Modes de corps rigide

Dans le cas d'une structure libre, les modes de corps rigide sont des modes de déplacement d'ensemble à énergie de déformation nulle. Ils peuvent être obtenus par la résolution du système :

$$\begin{bmatrix} K_{rr} & K_{rd} \\ K_{dr} & K_{dd} \end{bmatrix} \Theta_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.20})$$

La deuxième ligne de l'équation (IV.20) permet d'obtenir la relation :

$$\Theta_r = \begin{bmatrix} I_{rr} \\ \Theta_{dd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{rr} \\ -K_{dd}^{-1} K_{dr} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.21})$$

La matrice de corps rigide M_{rr} est aussi définie par :

$$M_{rr} = \Theta_r^T M \Theta_r \quad (\text{IV.22})$$

Les ddl de corps rigide doivent être judicieusement choisis afin de rendre isostatique la structure. L'application d'une procédure d'élimination de Gauss à la matrice de raideur peut servir à cet effet. Les ddl de corps rigide y sont alors associés aux ddl correspondant à des pivots nuls [49].

Modes d'attache et modes d'attache résiduels

Les modes d'attache, ou modes de flexibilité statique, sont obtenus en appliquant successivement des chargements unitaires sur les ddl d'interface. Le nombre de modes d'attache est égal au nombre de ddl de jonction. Ils forment la matrice Φ_a solution de:

$$\begin{bmatrix} K_{jj} & K_{ji} \\ K_{ij} & K_{ii} \end{bmatrix} S_j = \begin{bmatrix} I_{jj} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.23})$$

La figure Fig IV.3 illustre les déplacements dus à la force unitaire appliquée à un ddl de jonction, les autres étant libres.

Les modes d'attache représentent la solution d'un système linéaire (IV.23) d'équations qui inclut des contributions des modes de basses fréquences de la sous-structure. Il inclut en fait les contributions de tous les modes propres de la sous-structure. Nous remarquons que la résolution de l'équation (IV.23) requiert que la matrice K_{jj} soit non singulière. Ceci est le cas quand la structure est libre. Une procédure de filtrage des modes de corps rigide de la sous-structure doit alors être mise en œuvre. Une méthode pour s'affranchir de ce problème consiste à faire un filtrage des modes de corps rigide [49].

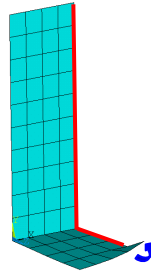


Fig IV. 3: Illustration d'un mode d'attache d'une sous-structure : effort imposé

Pour ce faire, une matrice P_r de filtrage des modes de corps rigide est construite telle que :

$$P_r = I_{NN} - M\Theta_r\Theta_r^T \quad (\text{IV.24})$$

Après avoir calculé la matrice de flexibilité de la structure rendue isostatique par blocage des ddls de corps rigide avec l'expression :

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{dd}^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.25})$$

la matrice de « pseudo-flexibilité » S_j est finalement obtenue par la relation :

$$S_j = P_r^T \bar{G} P_r \begin{bmatrix} I_{jj} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.26})$$

Lorsque le nombre de ddls de la sous-structure est élevé, l'application de cette méthode peut représenter un effort de calcul important. Dans l'équation (IV.26), il est alors préférable de décaler le spectre de réponse en remplaçant la matrice K par $K + \alpha M$, avec α pris égal à une fraction de la valeur propre du premier mode flexible [8]. Les modes d'attache obtenus par cette méthode, de « décalage », s'avèrent être de bonnes approximations des modes d'attache exacts.

Par ailleurs, il peut être important d'enlever les contributions des modes déjà inclus dans la base de représentation des modes d'attache. Ceci mène à la notion de modes d'attache résiduels R_j .

$$R_j = \Phi_a - (\Phi\Lambda^{-1}\Phi^T)I_{jj} \quad (\text{IV.27})$$

Dans l'équation (IV.27), Φ est une matrice modale tronquée, composée des modes retenus de la sous-structure et Λ est la matrice spectrale associée. Les modes d'attache résiduels sont utilisés dans les techniques de MacNeal [84] et Rubin [111] dont nous exposerons les principes dans la suite de ce travail.

Modes contraints

Les modes contraints, ou modes statiques de jonction, sont des modes de déformation correspondant à des déplacements imposés d'interface. Ils correspondent aux réponses statiques des ddls internes lorsque les déplacements unitaires sont appliqués successivement sur chacun des ddls de jonction en maintenant bloqués les ddls de l'interface. Ils forment ainsi la matrice Θ_j solution de :

$$\begin{bmatrix} K_{jj} & K_{ji} \\ K_{ij} & K_{ii} \end{bmatrix} \Theta_j = \begin{bmatrix} f_{jj} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.28})$$

où f_{jj} sont les efforts de réaction dus aux déplacements imposés. L'expression des modes contraints est donnée par la relation :

$$\Theta_j = \begin{bmatrix} I_{jj} \\ \Theta_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{jj} \\ -K_{ii}^{-1} K_{ij} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.29})$$

et celle de l'effort de réaction f_{jj} par :

$$f_{jj} = K_{jj} - K_{ji} K_{ii}^{-1} K_{ij} \quad (\text{IV.30})$$

Ce type de modes a été présenté par Przemieniecki [104] et est très largement employés par Guyan [54], Hurty [63] et Craig et Bampton [30, 31] pour réduire les modèles des sous-structures. Ces modes sont appropriés lorsque l'interface entre les sous-structures a une raideur plus importante que les sous-structures reliées. Comme pour le cas des modes d'attache, leur obtention peut poser le problème de la singularité de la matrice de raideur. Une procédure de filtrage peut également être effectuée avec le même principe que celui exposé dans le paragraphe concernant les des modes d'attache.

Modes normaux

Ces modes sont des vecteurs qui, suivant la nature des conditions aux limites du modèle de la sous-structure, seront classés en modes normaux à interface libre, fixe, chargée ou mixte.

- Modes à interface bloquée

Une base tronquée des modes à interface bloquée est obtenue par résolution du problème aux valeurs propres du système exprimé sur l'ensemble des ddls internes de la sous-structure. Les ddls de jonction sont soumis quant à eux à une condition d'encastrement qui suffit généralement à s'affranchir des mouvements de corps rigide. Les modes à interface bloquée sont employés notamment dans les méthodes de Hurty [63] et de Craig et Bampton [30, 31]. La figure Fig IV.4 présente un exemple d'un mode à interface bloquée.

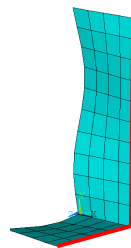


Fig IV. 4: Illustration d'un mode normal à interface bloquée

- **Modes à interface libre**

Une base tronquée des modes à interface libre est obtenue par résolution du problème aux valeurs propres du système libre de toute condition d'encastrement au niveau des ddl d'interface qui ne sont pas contraints. Ces modes sont généralement employés dans les méthodes de Goldman [52], Hou [59], MacNeal [84], Rubin [111] et Martinez [85].

- **Modes à interface chargée**

Pour obtenir ces modes, les propriétés de masse et de raideur de l'interface sont modifiées en y ajoutant des perturbations. Des masses et des inerties de rotation peuvent être introduites ponctuellement sur des ddl choisis. Des raideurs de translations et de rotation peuvent être ajoutées par des ressorts entre des ddl de l'interface ou entre un ddl de jonction et un point d'attache virtuel (hors structure). On trouve ce type de modes dans les méthodes de Gladwell [51] et la méthode développée par Benfield et Hurda [12].

- **Modes à interface hybride**

Pour obtenir ces modes, l'ensemble des ddl de jonction est scindé en deux sous-ensembles dont l'un est contraint au blocage pendant la résolution du problème aux valeurs propres. Cette approche particulière est proposée par MacNeal [84] comme une variante à sa méthode principale.

IV.2.2.2. Principe général de la sous-structuration

Le principe général de la sous-structuration, valable pour toutes les variantes de méthodes, peut se résumer à travers la figure Fig. IV.5. Les étapes 1, 4 et 5 sont réalisées sur la structure entière. Les étapes 2, 3 et 6 peuvent être exécutées pour chaque sous-structure indépendamment des autres et sont par conséquent intéressantes pour un traitement parallèle.

Après la reconstitution des coordonnées physiques, la solution du problème aux valeurs propres de départ est donnée par les valeurs propres λ et le vecteur y contenant les ddl internes et de jonction. Les modèles réduits doivent être assemblés en respectant les équations de compatibilité des efforts et déplacements aux frontières sur les ddl de jonction. Pour P_s sous-structures connectées sur une unique interface, les deux contraintes employées lors de l'assemblage sont :

- la continuité des déplacements à l'interface, exprimée par :

$$y_j^1 = \dots = y_j^k = \dots y_j^p; \quad (IV.31)$$

- l'équilibre des efforts de jonction, exprimé par :

$$\sum_{k=1}^{P_s} f_j^k = 0 \quad (IV.32)$$

Une approche générale pour assembler les sous-structures est d'employer les multiplicateurs de Lagrange associés aux équations de contraintes sur les déplacements à l'interface ((IV.30) par exemple) ou à d'autres équations relatives à la méthode de condensation utilisée.

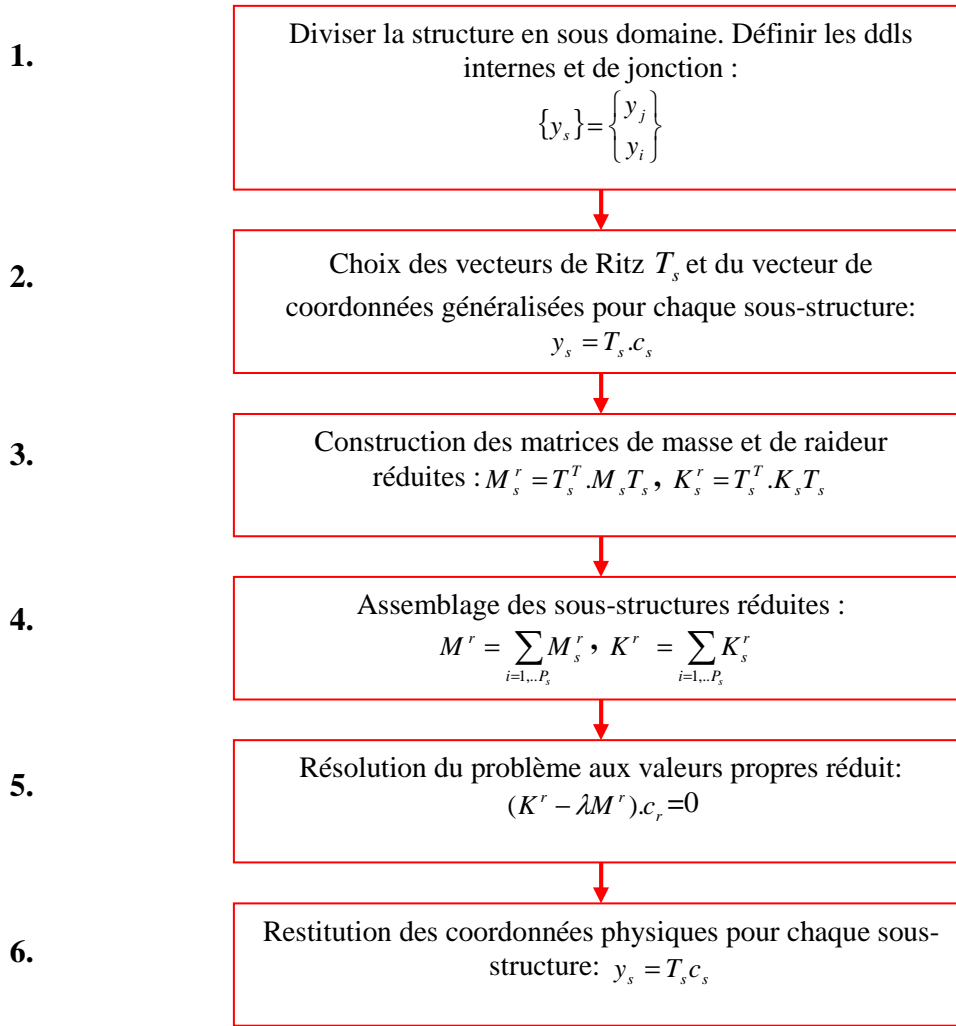


Fig IV. 5: Déroulement d'une procédure de sous-structuration

Dans le cas où les ddls généralisés contiennent les ddls de jonction des sous-structures, comme c'est le cas des méthodes utilisées dans ce travail, la procédure revient à un assemblage explicite sur les ddls de jonction (comme c'est le cas d'une procédure d'assemblage élémentaire). La mise en œuvre est relativement aisée mais les ddls de jonction doivent être conservés entièrement. Ceci peut poser problème lorsque le nombre de ces derniers est important. Des méthodes existent pour pallier à cet éventuel problème. Nous pouvons citer par exemple la démarche proposée par Brahmi [21] consistant en une condensation à deux niveaux et dans laquelle la deuxième condensation a pour but de réduire le nombre des ddls de jonction. Nous pouvons citer également les méthodes de MacNeal [84] ou de Rubin [111], qui vont être exposées par la suite, et qui sont conçues pour permettre d'éliminer complètement les ddls de jonction. Dans ces méthodes, le couplage entre les sous-structures est réalisé par élimination des efforts de liaison résiduels ce qui permet par conséquent d'éliminer entièrement les coordonnées relatives aux ddls de jonction du modèle final réduit.

IV.2.2.3. Méthodes de sous-structuration basées sur l'approche de Ritz

Dans ce paragraphe, nous passons en revue les principes des cinq techniques de sous-structuration les plus largement utilisées, à savoir les méthodes de : Guyan-Irons et Hurty, Craig-Bampton, MacNeal, Rubin et Martinez. Globalement, le procédé général de ces techniques est le même (Fig IV.5). Le

couplage des matrices de masse et de raideur réduites dépend du type de mode et du procédé d'assemblage choisis.

Les approches de Guyan-Irons, Hurty et Craig-Bampton et Martinez appartiennent à la famille des méthodes dites « primales » dans lesquelles la continuité des déplacements à l'interface est imposée (IV.31). Les approches de MacNeal, Rubin ou celle dite de « Craig-Bampton duale », développée par Rixen [108] sont des approches dont l'étape d'assemblage est particulière. Durant cette étape, l'équilibre des forces au niveau des ddls de l'interface est imposé (IV.32). Le couplage entre les sous-structures réduites est réalisé par un procédé d'élimination des efforts de liaison résiduels et permet l'obtention d'un modèle réduit final sans coordonnées relatives aux ddls de jonction.

Dans les deux cas, l'équation de départ pour la réduction du modèle d'une sous-structure est la suivante :

$$(K - \lambda M)y = f \quad (IV.33)$$

qu'on peut réécrire sous la forme matricielle :

$$\left(\begin{bmatrix} K_{jj} & K_{ji} \\ K_{ij} & K_{ii} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} M_{jj} & M_{ji} \\ M_{ij} & M_{ii} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} y_j^s \\ y_i^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_j^s \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (IV.34)$$

Les forces f_j^s associées aux ddls de jonction y_j^s assurent l'équilibre entre toutes les sous-structures.

Méthode de Guyan-Irons

Les vecteurs de Ritz utilisés dans la méthode de Guyan et Irons [54, 62] forment une matrice de passage en coordonnées généralisées contenant uniquement des modes statiques tels que définis dans (IV.23). Cette méthode reste largement utilisée en raison de sa simplicité de mise en œuvre. Dans cette méthode, les déplacements sont imposés sur des ddls « maîtres » m qui sont conservés lors de la réduction. Les ddls complémentaires dits « esclaves » sl sont éliminés.

Le partitionnement en ces deux types de ddls donne lieu à l'écriture de l'équilibre dynamique en termes de coordonnées généralisées suivant :

$$\left(\begin{bmatrix} K_{mm} & K_{msl} \\ K_{slm} & K_{slsl} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} M_{mm} & M_{msl} \\ M_{slm} & M_{slsl} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} y_m \\ y_{sl} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_m \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (IV.35)$$

La matrice de Guyan T_G de chaque sous-structure s'écrit de la manière suivante :

$$T_G = \Theta_m = \begin{bmatrix} I_{mm} \\ \Theta_{slm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{mm} \\ -K_{slsl}^{-1} K_{slm} \end{bmatrix} \quad (IV.36)$$

Le système d'équations résultant de la transformation de (IV.35) peut s'écrire uniquement en termes des ddls maîtres :

$$(K_G^r - \lambda M_G^r)y_m = f_m \quad (IV.37)$$

avec :

$$K_G^r = K_{mm} + K_{msl} \Theta_{slm} \quad (IV.38)$$

$$M_G^r = M_{mm} - M_{msl} K_{slsl}^{-1} K_{slm} - K_{msl} K_{slsl}^{-1} M_{slm} + K_{msl} K_{slsl}^{-1} M_{slsl} K_{slsl}^{-1} K_{slm} \quad (IV.39)$$

L'avantage de cette technique est de permettre une réduction significative du nombre de ddls en plus d'être une méthode facilement programmable. Un de ses inconvénients réside dans le fait qu'elle couple les matrices de masse et de raideur (IV.39), ce qui rend les matrices de masse pleines. Par ailleurs, son domaine de validité se limite aux basses fréquences. En effet, selon [44, 116], cette méthode est précise dans la gamme des fréquences propres allant jusqu'à la valeur propre fondamentale du problème esclave (problème où les ddls maîtres sont bloqués). La conséquence directe de cela est que la qualité des solutions du modèle réduit est dépendante du choix des ddls maîtres. Les méthodes utilisées pour optimiser le choix des ddls maîtres se basent sur la maximisation de la fréquence fondamentale du problème esclave. Les ddls maîtres généralement choisis sont ceux associés à des valeurs de masse et d'inertie importantes.

Méthode à interface bloquée de Craig-Bampton

Il s'agit de la méthode de réduction [30, 31] la plus largement utilisée en raison de sa simplicité d'implémentation informatique et de ses performances reconnues. Son principe repose sur l'enrichissement de la transformation statique de Guyan-Irons par des modes normaux à interface bloquée de la sous-structure. Cette base enrichie constitue ainsi une très bonne base de Ritz permettant d'étendre considérablement le domaine de validité d'une transformation statique.

Les coordonnées généralisées c_s sont alors composés de coordonnées physiques y_j^s (les ddls de jonction sont les seuls ddls physiques retenus) et de coordonnées modales q_f associées aux modes

bloqués $\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\phi}_i \end{bmatrix}$.

$$c_s = \begin{Bmatrix} y_j^s \\ q_f \end{Bmatrix} \quad (IV.40)$$

La transformation de Craig-Bampton aux ddls généralisés s'écrit de la manière suivante :

$$T_s = \begin{bmatrix} I_{jj} & 0 \\ \Theta_{ij} & \bar{\phi}_i \end{bmatrix} \quad (IV.41)$$

Le problème réduit de la $s^{\text{ème}}$ sous-structure devient le suivant :

$$T_s^T \left(\begin{bmatrix} K_{jj} & K_{ji} \\ K_{ij} & K_{ii} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} M_{jj} & M_{ji} \\ M_{ij} & M_{ii} \end{bmatrix} \right) T_s \begin{Bmatrix} y_j^s \\ q_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_j^s \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (IV.42)$$

Ce qui conduit à :

$$\left(\begin{bmatrix} K_G^r & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} M_G^r & \Theta_{ij}^T M_{ii} \bar{\phi}_i + M_{ji} \bar{\phi}_i \\ \text{Sym} & I_{ii} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} y_j^s \\ q_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_j^s \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (IV.43)$$

M_G^r et K_G^r sont les matrices de masse et de raideur condensées par la transformation statique de Guyan réalisée sur l'ensemble des ddls de jonction. Λ est la matrice des valeurs propres associées aux modes à interface bloquée. Finalement, l'opération la plus coûteuse de la méthode revient à résoudre le problème aux valeurs propres de la sous-structure à interface bloquée.

Le principal inconvénient de cette méthode est de garder tous les ddls de jonction dans le modèle réduit qui, comme nous l'avons évoquée dans le paragraphe traitant du principe général de la sous-

structuration, peut limiter le taux de réduction de la méthode dans le cas de structures complexes ou découpées de manière peu judicieuse.

Il reste que la bonne qualité de prédiction de la méthode de Craig-Bampton et sa facilité d'implémentation en font la méthode la plus largement utilisée dans l'industrie. C'est pourquoi nous l'avons choisi comme la méthode de sous-structuration « standard » dans la suite de nos travaux portant notamment sur l'étude de sa robustesse et de son amélioration.

Méthode à interface libre de MacNeal

Il s'agit d'une méthode mixte [84] comprenant à la fois des modes à interface libre ψ et des modes résiduels R_j . Elle utilise la propriété d'orthogonalité entre ces modes :

$$\psi^T K R_j = 0 \quad \text{et} \quad \psi^T K M_j = 0 \quad (\text{IV.44})$$

Les déplacements des sous-structures sont projetés sur une base constituée de modes libres et de modes de flexibilité résiduelle relatifs aux ddls sollicités :

$$y = \psi c + R_f f_f \quad (\text{IV.45})$$

MacNeal utilise un produit de transformation non-symétrique lors de la condensation de chaque sous-structure. Pour une sous-structure « s », la relation (IV.46) définit la transformation de droite T_M^D telle que :

$$\begin{bmatrix} y_j^s \\ y_i^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_j^s & R_{jj}^s & R_{je}^s \\ \psi_i^s & R_{ii}^s & R_{ie}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^s \\ f_j^s \\ f_e^s \end{bmatrix} = T_M^D \begin{bmatrix} c^s \\ f_j^s \\ f_e^s \end{bmatrix} \quad (\text{IV.46})$$

Où : f_j^s et f_e^s sont respectivement les efforts de jonction et les forces extérieures auxquels la sous-structure est soumise.

La transformation de gauche est constituée de la base modale tronquée des modes normaux libres :

$$T_M^G = \psi^s \quad (\text{IV.47})$$

Après réduction de la sous-structure par le produit des transformations de droite T_M^D et de gauche T_M^G , l'équilibre de la sous-structure réduite s'écrit sous la forme :

$$\psi^{sT} [K^s - \omega^2 M^s] [\psi^s c^s + R_j^s f_j^s + R_e^s f_e^s] = \psi^{sT} [\hat{f}_j^s + \hat{f}_e^s] \quad (\text{IV.48})$$

Où : \hat{f}_j^s et \hat{f}_e^s sont respectivement les vecteurs des efforts de jonction et des forces extérieures.

Compte-tenu de la relation d'orthonormalité (IV.44) entre les modes libres et les modes résiduels, la relation d'équilibre réduite de la sous-structure s s'écrit :

$$[\Lambda^s - \omega^2 I^s] c^s = \psi_j^{sT} f_j^s + \psi_e^{sT} f_e^s \quad (\text{IV.49})$$

Ici aussi, l'opération la plus coûteuse est la résolution du problème aux valeurs propres de la sous-structure à interface libre.

Comme cette méthode est mixte, sa principale caractéristique par rapport aux méthodes de Guyan ou de Craig-Bampton, où l'assemblage des modèles réduits se fait uniquement en assurant la continuité des déplacements sur la jonction, l'assemblage est assurée ici en imposant la compatibilité des forces à travers l'interface en plus de la continuité des déplacements. Dans le cas de deux sous-structures partageant une même interface, ceci se traduit par :

$$y_j^{s1} = y_j^{s2} \quad \text{et} \quad \hat{f}_e = \hat{f}_j^{s1} + \hat{f}_j^{s2} \quad (\text{IV.50})$$

Les efforts de jonction des sous-structures $s1$ et $s2$ sont exprimés par :

$$f_j^{s1} = f_j^{s2} = [R_{jj}^{s1} + R_{jj}^{s2}]^{-1} [\psi_j^{s2} c^{s2} + R_{je}^{s2} f_e^{s2} - \psi_j^{s1} c^{s1} - R_{je}^{s1} f_e^{s1}] \quad (\text{IV.51})$$

En introduisant l'expression (IV.51) dans la relation (IV.49) pour chaque sous-structure, MacNeal obtient l'équilibre du modèle réduit final :

$$\left\{ \begin{bmatrix} \Lambda^{s1} + \psi_j^{s1T} \bar{R}_{jj}^{-1} \psi_j^{s1} & -\psi_j^{s1T} \bar{R}_{jj}^{-1} \psi_j^{s2} \\ -\psi_j^{s2T} \bar{R}_{jj}^{-1} \psi_j^{s1} & \Lambda^{s2} + \psi_j^{s2T} \bar{R}_{jj}^{-1} \psi_j^{s2} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} I^{s1} & 0 \\ 0 & I^{s2} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} c^{s1} \\ c^{s2} \end{bmatrix} = C_e \begin{bmatrix} f_e^{s1} \\ f_e^{s2} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.52})$$

avec :

$$C_e = \begin{bmatrix} \bar{R}_{jj} = R_{jj}^{s1} + R_{jj}^{s2} & \\ \psi_e^{s1T} - \psi_j^{s1T} \bar{R}_{jj}^{-1} R_{je}^{s1} & \psi_j^{s1T} \bar{R}_{jj}^{-1} R_{je}^{s2} \\ \psi_j^{s2T} \bar{R}_{jj}^{-1} R_{je}^{s1} & \psi_e^{s2T} - \psi_j^{s2T} \bar{R}_{jj}^{-1} R_{je}^{s2} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.53})$$

L'avantage de la méthode de MacNeal est de garantir une très bonne précision en plus de réduire de manière importante la taille du problème, notamment celui aux valeurs propres réduit, à résoudre. En effet ; les déplacements et les forces aux jonctions sont éliminés par la procédure de réduction et d'assemblage. Par ailleurs, le fait d'éliminer tous les ddls physiques de jonction peut aussi représenter un inconvénient. En effet ; si un gain est enregistré au niveau de l'étape de calcul du problème aux valeurs propres, un supplément de temps de calcul peut vite apparaître quand il s'agit de restituer tous les ddls physiques dans les cas où cela est nécessaire, (calculs de FRF, confrontation avec les vecteurs propres du modèle exact...etc). Un autre inconvénient de cette méthode consiste dans le fait qu'elle devient délicate à mettre en œuvre lorsqu'il s'agit d'assembler un système complexe ou à géométrie compliquée contenant plusieurs sous-structures.

Méthode de Rubin

Cette méthode [111] est en réalité une correction apportée à la méthode de MacNeal. En effet ; les modes résiduels sont corrigés en ajoutant une contribution dynamique telle que :

$$\tilde{R}_j = R_j + \lambda R_j^T M R_j \quad (\text{IV.54})$$

Les déplacements de la sous-structure s sont exprimés selon Rubin par la transformation de droite T_R^D :

$$y^s = \psi^s c^s + \tilde{R}_j f_f^s = T_R^{DT} \begin{bmatrix} c^s \\ f_f^s \end{bmatrix} \quad (\text{IV.55})$$

Le principe de la suite des étapes est analogue à celui de la méthode de MacNeal. Même si l'équilibre du système réduit final est analogue à celui de la méthode de MacNeal (IV.52 et IV.53), la mise en œuvre est toutefois plus complexe. La matrice de couplage des efforts C_e , présente également pour la méthode de MacNeal (IV.53), est non linéaire en $\lambda = \omega^2$.

La technique de Rubin est plus précise que la méthode de MacNeal du fait de l'emploi du résidu enrichi d'un terme dynamique.

Malgré leur précision, les deux méthodes de MacNeal et de Rubin sont délicates à mettre en œuvre et les procédures d'assemblages difficiles à systématiser. Un phénomène de couplage entre les efforts appliqués sur les sous-structures est également introduit.

Méthode de Martinez

Cette méthode [85] se base sur les techniques de Rubin, elle-même basée sur la méthode de MacNeal, présentées plus haut. La matrice de passage en coordonnées généralisées est la même que celle proposée par la méthode de Rubin mais écrite sous une forme analogue à la matrice de transformation de Craig-Bampton (forme primale) :

$$\begin{bmatrix} y_j \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{jj} & 0 \\ \tilde{R}_{ij} \tilde{R}_{jj}^{-1} & \psi_i - \tilde{R}_{ij} \tilde{R}_{jj}^{-1} \psi_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_j \\ c \end{bmatrix} = T_s \begin{bmatrix} y_j \\ c \end{bmatrix} \quad (IV.56)$$

Cette écriture représente la différence majeure entre les méthodes de MacNeal et Rubin, et la méthode de Martinez qui en est issue.

En effet ; dans les deux premières, les coordonnées généralisées sont composées de coordonnées modales, associées aux modes à interface libre, et de forces de jonction.

La méthode de Martinez est quant à elle conçue pour passer à des coordonnées généralisées composées de coordonnées modales également mais avec cette fois ci des coordonnées physiques de jonction au détriment des coordonnées de forces. Ceci lui confère les mêmes propriétés que celles des méthodes « primales ».

Après développement, le problème réduit peut être donné par la relation suivante :

$$\left(\begin{bmatrix} \tilde{R}_{jj}^{-1} & -\tilde{R}_{jj}^{-1} \psi_j \\ -\psi_j^T \tilde{R}_{jj}^{-1} & A + \psi_j^T \tilde{R}_{jj}^{-1} \psi_j \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} A_{jj} & -A_{jj} \psi_j \\ -\psi_j^T A_{jj}^{-1} & I_{jj} + \psi_j^T A_{jj}^{-1} \psi_j \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} y_j \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_j \\ 0 \end{bmatrix} \quad (IV.57)$$

Avec : $A_{jj} = \tilde{R}_{jj}^{-1} \tilde{R}_j^T M \tilde{R}_j \tilde{R}_{jj}^{-1}$ une matrice de couplage dynamique.

Le principal intérêt de cette méthode, par rapport à une méthode de type MacNeal ou Rubin, réside donc dans la simplification du processus d'assemblage qui est analogue à celui de méthodes primales telle que la méthode de Craig-Bampton [30, 31]. Pour ces dernières, seule la condition de continuité des déplacements au niveau de la jonction doit être assurée. La méthode de Martinez permet par sa mise en forme de s'affranchir des conditions de compatibilité des forces de jonction.

IV.2.3. Amélioration des bases de réduction de Ritz

Lors d'une étude de propagation des incertitudes, notamment par une simulation de type Monte Carlo, l'utilisation de modèles réduits fait nécessairement appel au concept de robustesse des bases de réduction, notamment lorsque les niveaux d'incertitudes, ou de modifications, introduits sont élevés. De plus, et en raison du grand nombre de problèmes aux valeurs propres résolus lors de cette propagation des incertitudes, il est souvent inintéressant voire impossible, de calculer une base de

réduction à chaque perturbation du système. La réanalyse approchée est utilisée dans ce travail afin de répondre à ce problème. En effet ; afin de réduire les coûts de calcul, la stratégie classiquement utilisée consiste à partir de la base de réduction du système nominal en la complétant ou en l'améliorant efficacement, afin de garantir une bonne représentation du système modifié à moindre coût de calcul. Pour ce faire, plusieurs approches existent. La figure Fig.IV.6 illustre le schéma de déroulement d'une réanalyse approchée dans un cadre de sous-structuration et pose le problème de la robustesse des bases mises en jeu.

Mais avant tout, l'idée naturelle d'amélioration d'une base de réduction, toujours tronquée à un certain nombre de vecteurs, est d'augmenter le nombre de modes de cette base et de vérifier l'amélioration sur la qualité de prédiction correspondante. Dans le cas de faibles perturbations localisées sur certains ddls, la base nominale est en général suffisamment robuste vis-à-vis de ces perturbations. Elle peut l'être également dans certains cas même si les niveaux de perturbations sont importants ou globaux à condition d'augmenter suffisamment sa taille. Cela dit, l'amélioration de la base nominale par ce procédé est en général très lent.

Parmi les méthodes qui existent pour améliorer plus efficacement, avec un nombre restreint de vecteurs calculés, cette base nominale, nous pouvons citer quelques méthodes. Avant de les exposer, notons que ces dernières ont généralement été développées et testées pour des perturbations de type paramétrique où les modifications sont localisées sur certaines zones du modèle. Ceci pose d'ailleurs la question de leur efficacité si les perturbations sont d'une nature plus complexe (non-linéaires localisées, non-linéaires réparties, non-paramétriques globales). Notre travail consiste à étudier l'efficacité de certaines d'entre elles et de les proposer à des perturbations fortes de type non-paramétrique ou hybride.

- **L'utilisation de la décomposition en série de Taylor.** Largement utilisée [150], nous pouvons la traduire en décomposant la réponse du système modifié y_m , au premier ordre, en fonction de la réponse du système nominal y_0 et des modifications introduites. La principale difficulté introduite par cette méthode est le calcul des dérivées partielles, par rapport aux paramètres modifiés. En effet ; si le nombre de paramètre est important, les coûts de calcul peuvent rapidement devenir prohibitifs. De plus, l'ordre de décomposition en série de Taylor peut être élevé (2 à 3) si les niveaux de perturbations deviennent conséquents. Ceci peut donc alourdir la mise en œuvre de la méthode et son coût de calcul.
- **L'enrichissement de la base de réduction initiale par des vecteurs choisis efficacement.** Cette approche, utilisée par Balmès [6, 7, 9], consiste à réduire, par une technique classique, un échantillon de modèles, où chacun de ces derniers correspond à une configuration de valeurs particulières des paramètres de conception, puis à les combiner pour obtenir la base de réduction finale plus robuste vis-à-vis de ces perturbations paramétriques:

$$T = [T(\text{config},1) \quad T(\text{config},2) \quad \dots \quad T(\text{config},n)] \quad (\text{IV.58})$$

L'inconvénient de cette méthode est que la taille de la base de réduction ainsi construite devient importante dans le cas où le nombre de paramètres est limité.

- **La méthode proposée au LMARC.** [17, 82, 90]. Elle consiste à enrichir la base de condensation du MEF nominal de la sous-structure avec des vecteurs de résidus statiques prenant en compte la contribution des modes non-considérés. Ces modes d'enrichissement dépendent des perturbations introduites sur le système modifié. Au final, cela revient donc à considérer que la contribution dynamique des modes nominaux est la même pour le modèle modifié. Tenir compte de l'information supplémentaire due à la modification se résume à actualiser la contribution statique des modes non-considérés. La robustesse de la base enrichie dépend donc essentiellement du nombre de modes résiduels calculés mais aussi du choix des modes nominaux servant à calculer ces vecteurs résiduels. Cette méthode sera développée plus en détail dans la suite de ce travail. Jusqu'à lors utilisée pour des perturbations de type « paramétrique », son efficacité sera jugée sur des perturbations de type non-paramétrique.

- **La méthode des approximations combinées.** Cette méthode a été proposée par Kirsch [23, 70, 71,72]. Son principe est basé sur la construction, pour une structure donnée, d'une base de condensation robuste d'une manière judicieuse par un développement en série binomiale de quelques vecteurs propres de la structure nominale. Le rang du développement dépend de la précision souhaitée. Cette base est ensuite utilisée pour réduire la taille du problème exact. La méthode a été développée initialement pour la réanalyse des problèmes en statique linéaire. Elle a été adaptée par la suite à la réanalyse en dynamique, particulièrement pour la condensation directe. Le travail de Weisser *et al.* [146] a démontré la possibilité d'étendre la méthode des approximations combinées à la sous-structuration. En raison de son originalité dans l'amélioration des bases de réduction par l'introduction d'une expansion en série binomiale, nous avons choisi de retenir son principe et d'en proposer une variante généralisée, adaptée à la sous-structuration. Nous jugerons de son efficacité en réanalyse approchée notamment dans le cas de la présence de perturbations d'origines non-paramétrique ou hybride.

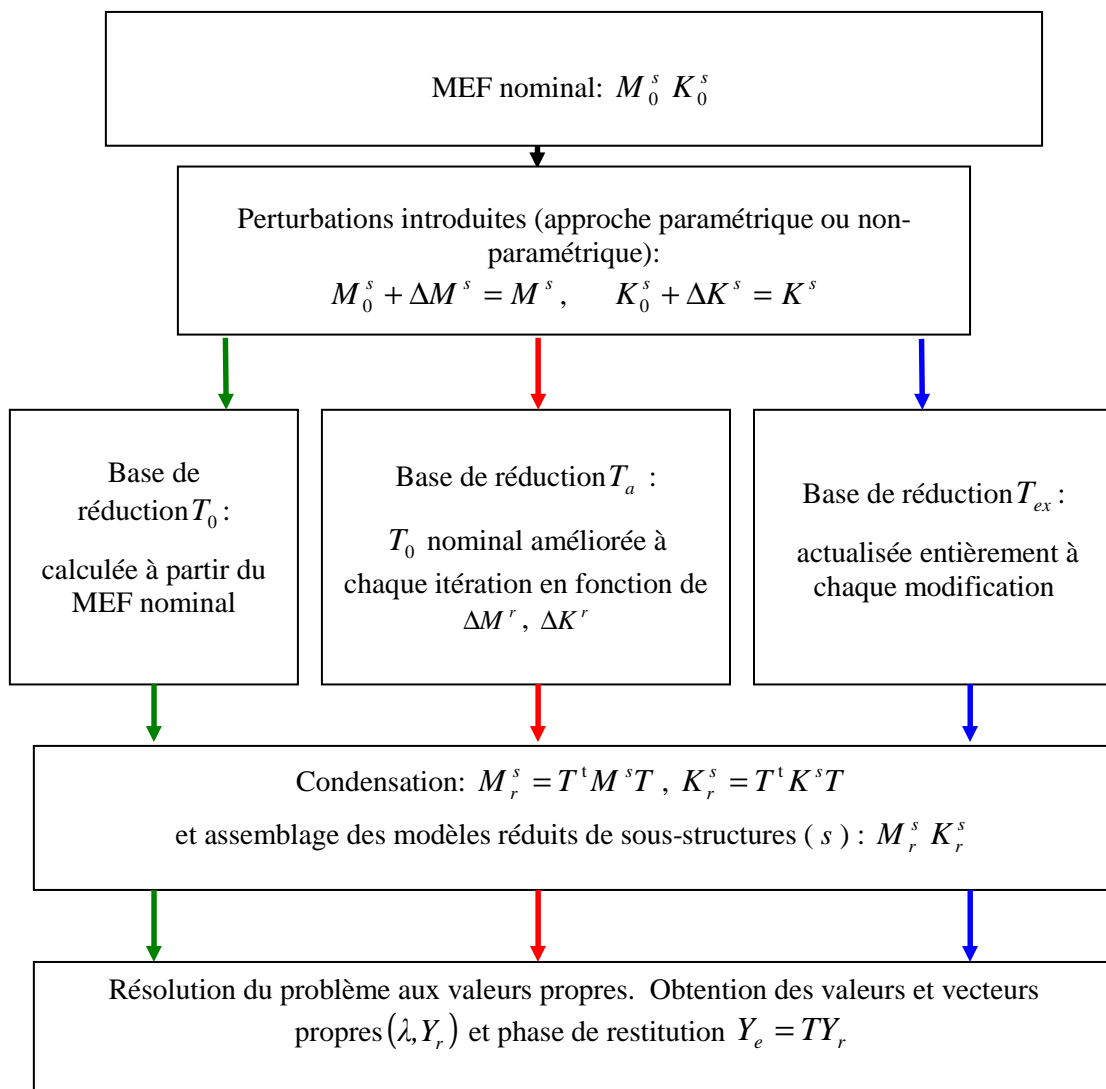


Fig IV. 6: Réanalyse approchée en sous-structuration: compromis entre un calcul par base actualisée et un autre par base nominale unique

IV.2.3.1. Méthode d'enrichissement d'une base de condensation par des vecteurs de résidus statiques (SRVE)

Dans ce qui suit, la démarche employée concerne l'enrichissement des bases de réductions des sous-structures une à une. Ces dernières sont considérées comme des systèmes indépendants. Les étapes d'assemblage et de résolution sont indépendantes de cette étape.

Comme nous l'avons vu, le principe de la méthode est d'utiliser une matrice de réduction, pour chaque sous-structure, construite de manière à représenter le mouvement du système nominal, d'impédance $Z_0 = K_0 - \omega^2 M_0$, et du système soumis à des modifications $\Delta Z = \Delta K - \omega^2 \Delta M$. Notons que seules la nature et la localisation de ces perturbations (d'origine paramétrique ou non-paramétrique) sont définies. Les amplitudes sont quant à elle inconnues. Dans la suite de ce travail, toutes les formulations dynamiques se basent sur des systèmes à amortissement nuls. Seules les matrices de masse et de raideur sont considérées.

IV.2.3.1.1. Principe de la méthode en condensation directe sur une structure

La première étape consiste à estimer les zones modifiables. Dans le cas d'une vision de type « paramétrique », ceci consiste à localiser et estimer les zones modifiables du modèle. Il s'agit des zones associées à certaines propriétés matérielles ou géométriques communes, considérées comme des paramètres. Dans le cas d'une approche « non-paramétrique » ou « hybride », ceci revient à définir et à assembler les matrices de masse et de raideur des zones concernées et pour lesquelles la procédure non-paramétrique sera appliquée.

A partir de l'équilibre dynamique du système nominal n'étant soumis à aucune précontrainte ou force extérieure:

$$Z_0(\omega).y(\omega) = 0 \quad (IV.59)$$

En Introduisant une perturbation ΔZ , l'équilibre s'écrit :

$$Z(\omega).y(\omega) = [Z_0(\omega) + \Delta Z(\omega)].y(\omega) = 0 \quad (IV.60)$$

ce qui peut se traduire, en introduisant la notion de force de modification $f_\Delta(\omega)$ associée à $\Delta Z(\omega)$, par un équilibre dynamique, d'inconnue $y(\omega)$, du modèle nominal soumis à cette force :

$$Z(\omega).y(\omega) = f_\Delta(\omega) \quad (IV.61)$$

avec :

$$f_\Delta(\omega) = -\Delta Z(\omega).y(\omega) \quad (IV.62)$$

A partir de là, la réponse du système modifiée peut être estimée à l'aide d'une base de Ritz, correspondant au système nominal, enrichie avec des résidus statiques tels que :

$$y(\omega) \approx T_0 c(\omega) + R f_\Delta(\omega) \quad (IV.63)$$

L'équation (IV.62) montre que $f_\Delta(\omega)$ dépend théoriquement de l'inconnue $y(\omega)$. A défaut de pouvoir la calculer exactement, elle peut être au mieux estimée en utilisant une série de vecteurs ϕ de la base nominale T_0 . Cela nous conduit à écrire :

$$f_A(\omega) = -\Delta Z(\omega) \cdot \phi \cdot c(\omega) \quad (\text{IV.64})$$

Finalement, une base de réduction, robuste du système modifié, consiste en une concaténation de la base de réduction associée au système nominal et de résidus associés à une suite de chargements statiques, représentatifs des perturbations introduites:

$$T_s = [T_0 \quad R_\Delta] \quad (\text{IV.65})$$

La base correspondant au système nominal dépend du choix de l'utilisateur. Il peut en effet s'agir d'une base de type Craig-Bampton, Martinez ou d'une base modale tronquée.

Masson [90] expose la méthode d'enrichissement par résidus statiques dans un contexte de sous-structuration en se basant sur l'approche de Craig-Bampton, autrement dit en utilisant des modes normaux à interface bloquée. En raison des performances de cette approche, de sa large utilisation dans l'industrie et de sa facilité d'implémentation numérique, nous avons également fait ce choix. Autrement, la méthode peut être envisagée à d'autres types de bases nominales.

La méthode a été développée par Masson [90] dans le cadre de modifications paramétriques. Dans cette mesure, une base de forces $F_{\Delta,pi}$, associée aux modifications de raideur et de masse dues aux perturbations sur les paramètres, correspondant aux différentes zones du MEF, est calculée telle que pour chaque zone:

$$F_{\Delta,pi} = [F_{\Delta,pi}^M \quad F_{\Delta,pi}^K] \quad (\text{IV.66})$$

avec :

$$F_{\Delta,pi}^M = \Delta M_{pi}^{zone} \Lambda \phi \quad \text{et} \quad F_{\Delta,pi}^K = \Delta K_{pi}^{zone} \phi \quad (\text{IV.67})$$

Avec Λ la matrice spectrale des valeurs propres correspondant aux vecteurs choisis de ϕ et :

$$\Delta M_{pi}^{zone} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & m_{zone} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta K_{pi}^{zone} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_{zone} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.68})$$

Autant de bases F_Δ sont calculées que de paramètres mis en jeu. Une base F_Δ issue de la concaténation des $F_{\Delta,pi}^M$ et $F_{\Delta,pi}^K$, correspondant à toutes les zones, est ensuite construite.

Une fois cette base construite, une série de vecteurs de résidus statiques est ensuite calculée par :

$$R_\Delta^* = K_0^{-1} F_\Delta \quad (\text{IV.69})$$

Remarquons ici que la condition de régularité de K_0 est nécessaire pour le calcul des résidus statiques.

Dans le cas où la structure nominale est encastrée, naturellement ou lors d'un calcul de modes normaux libres, cette condition est bien entendu satisfaite. Dans le cas contraire, une procédure de filtrage des ddls de corps rigide est nécessaire. Nous avons eu l'occasion de décrire une telle procédure, en calculant la matrice de flexibilité, dans le paragraphe concernant les modes d'attache, page 132.

Par construction, la série de vecteurs R_Δ^* correspond à plusieurs modifications ce qui ne garantit pas que R_Δ^* soit de rang maximal. Pour pallier à cette éventualité, une procédure de décomposition en valeurs singulières (DVS) est proposée dans [90]. Elle permet de limiter le nombre des vecteurs de résidus retenus en ne gardant que les directions prépondérantes de R_Δ^* .

$$R_A^* = U \Sigma V^T \quad (IV.70)$$

où U et V sont deux matrices réelles orthonormales et Σ est la matrice diagonale des valeurs singulières de R_A^* . (IV.70) qui peut s'écrire également :

$$R_A^* = U_1 \Sigma_1 V_1^T + U_2 \Sigma_2 V_2^T \quad (IV.71)$$

où Σ_1 comporte dans un ordre décroissant les nl plus grandes valeurs singulières de la décomposition (IV.70). Il est d'usage de fixer un critère de troncature afin de choisir nl et donc $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1 \dots \sigma_m)$ tels que, par exemple :

$$\sigma_1 / \sigma_m \leq 10^{-5} \quad (IV.72)$$

La réduction contenant les vecteurs de résidus statiques les plus prédominants formant une sous-base de rang maximal, dans la mesure de la troncature choisie, s'obtient enfin par :

$$R_A = U_1 \Sigma_1 \quad (IV.73)$$

Une dernière étape de normalisation des vecteurs de résidus est souvent nécessaire avant l'opération de concaténation avec la base nominale T_0 (IV.65). La base construite T_s est alors de rang maximal et de faible conditionnement.

Remarque : En vue d'augmenter la précision de la méthode et de réduire autant que possible les tailles des bases robustes calculées, Masson *et al.* [89] ont proposé une utilisation de la méthode de calcul des résidus à deux niveaux consécutifs permettant ainsi d'éliminer les coordonnées généralisées liées aux vecteurs de résidus statiques. Nous pouvons citer également le travail de Bouazizi *et al.* [19] qui propose l'extension du champ d'application de la méthode à des structures en présence de non-linéarités localisées.

Dans cette même logique, nous proposons dans la suite de ce travail d'étendre l'utilisation de cette méthode cette fois-ci à des perturbations plus globales de type non-paramétrique. La principale différence qui est introduite est donc liée au « degré de remplissage » des matrices de perturbations ΔM et ΔK . Si celles-ci sont souvent creuses pour des perturbations paramétriques localisées sur les ddls concernés, elles deviennent pleines pour des perturbations de type non-paramétrique. L'application de la méthode sur un cas numérique permettra donc de juger de son efficacité face à ce type de perturbations.

IV.2.3.1.2. Extension de la méthode à la sous-structuration de Craig-Bampton

Masson [90] propose ensuite d'étendre la méthode EVRS dans un contexte de sous-structuration, particulièrement au cas de la méthode de Craig-Bampton. La matrice ϕ de (IV.64) est alors dans ce cas composée des vecteurs normaux à interface bloquée et s'écrit sous la forme :

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_i \end{bmatrix} \quad (IV.74)$$

La transformation de Craig-Bampton s'écrit, pour rappel, sous la forme :

$$T_0 = \begin{bmatrix} I_{jj} & 0 \\ \Theta_{ij} & \phi_i \end{bmatrix} \quad (\text{IV.75})$$

Les bases de forces associées aux modifications F_Δ s'écrivent alors :

$$F_\Delta = \begin{bmatrix} \Delta M & \Delta \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_i \end{bmatrix} & \Delta K \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_i \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.76})$$

Ce qui donne la forme suivante aux vecteurs de résidus statiques associés aux perturbations ΔM et ΔK :

$$R_\Delta = \begin{bmatrix} 0 \\ R_{\Delta i} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.77})$$

et permet d'écrire la base de Craig-Bampton enrichie sous la forme :

$$T_{CBE} = T_{EVRS} = \begin{bmatrix} I_{jj} & 0 & 0 \\ \Theta_{ij} & \phi_i & R_{\Delta i} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.78})$$

IV.2.3.2. Méthode des Approximations Combinées et son extension à la sous-structuration (GCA)

La méthode des approximations combinées (CA pour *Combined Approximations*), développée par Kirsch [70, 71, 72], a été initialement proposée pour la réanalyse de problèmes statiques linéaires où son efficacité a été démontrée. Elle a été étendue ensuite à la réanalyse en dynamique linéaire notamment par les travaux récents de Weisser *et al.* [146] où elle a été appliquée à la réanalyse dynamique approchée. Son principe est basé sur la construction, pour une structure donnée, d'une base de condensation robuste de manière judicieuse en introduisant un développement en série binomiale de quelques vecteurs propres de la structure nominale.

Contrairement à la méthode d'enrichissement SRVE par des vecteurs de résidus statiques, la performance supplémentaire de cette méthode réside dans le fait qu'à partir de chaque mode de la base nominale, non pas un mais une série de vecteurs d'enrichissement est calculée. Ceci la rend *a priori* plus robuste à des perturbations plus complexes que des perturbations d'origine paramétrique localisées sur certains ddls d'un MEF.

C'est dans l'optique d'être adaptée à la réanalyse approchée de structures subissant des perturbations d'origines non-paramétrique ou hybride qu'elle sera développée dans ce travail. Son adoption dans un contexte de sous-structuration fait également l'intérêt de la suite de cette étude.

IV.2.3.2.1. Principe de la méthode des approximations combinées en condensation directe

Considérons un équilibre dynamique d'une sous-structure, non-sujette à aucune contrainte dynamique sur aucun de ses ddls. Nous considérons que M_0 et K_0 sont respectivement les matrices masses et raideur de la structure nominale, non modifiée.

L'équilibre du système initial s'écrit :

$$K_0 y^0 = \lambda^0 M_0 y^0 \quad (\text{IV.79})$$

L'équilibre dynamique de la structure modifiée peut s'écrire quant à lui sous la forme :

$$(K_0 + \Delta K)y = \lambda(M_0 + \Delta M)y \quad (\text{IV.80})$$

On peut écrire après multiplication à gauche par : K_0^{-1} (avec la condition de régularité de K_0):

$$y = (I + B)^{-1} \lambda K_0^{-1} (M_0 + \Delta M)y \quad (\text{IV.81})$$

$$\text{avec: } B = K_0^{-1} \Delta K \quad (\text{IV.82})$$

Remarquons ici que l'écriture de (IV.81) sous la forme d'une série binomiale en B nécessite que la condition de régularité de K_0 soit satisfaite. Dans le cas où la structure nominale est encastree, naturellement ou lors d'un calcul de modes normaux libres, cette condition est naturellement satisfaite. Dans le cas contraire, une procédure de filtrage des ddls de corps rigide doit être envisagée. Un exemple d'une procédure de filtrage de ces ddls a été montré dans le paragraphe concernant les modes d'attache, page 132.

(IV.81) peut se mettre sous la forme:

$$y = (I + B)^{-1} y^1 \quad (\text{IV.83})$$

avec :

$$y^1 = \lambda K_0^{-1} (M_0 + \Delta M)y \quad (\text{IV.84})$$

(IV.83) est une série binomiale qui permet d'exprimer la solution de la structure modifiée y en fonction de l'information du système initial (K_0, M_0) et de la modification apportée ($\Delta K, \Delta M$).

Son développement $((I + B)^{-1} = I - B + B^2 - B^3 \dots$ sous la condition de convergence $\lim_{k \rightarrow \infty} B^k \rightarrow 0$) permet de construire, pour chaque mode r_v de la structure modifiée, une base de réduction r_{vb} prenant en compte l'information de la modification apportée:

$$r_{vb} = [r_v^1, r_v^2, \dots, r_v^s] \quad (\text{IV.85})$$

Les vecteurs de cette base sont issus de (IV.83) et sont calculés par la relation de récurrence suivante :

$$r_v^i = -B r_v^{i-1} \quad i = \{2, \dots, s\} \quad (\text{IV.86})$$

L'initialisation de cette récurrence consiste à définir le vecteur r_v^1 . L'approximation suivante est donc introduite [70]:

$$r_v^1 = \lambda_v^0 K_0^{-1} (M_0 + \Delta M) r_v^0 \quad (\text{IV.87})$$

Elle consiste donc en une première approximation, à partir des $v^{ème}$ valeurs et vecteurs propres (λ_v^0, r_v^0) de la structure nominale, pour initialiser le premier terme de la série binomiale.

Rappelons que les bases r_{vb} sont construites pour chaque vecteur propre v de telle sorte que l'on obtienne pour tous les modes, la série de vecteurs concaténés suivante:

$$r_b^* = [r_{1b} \quad r_{2b} \quad \dots \quad r_{vb}] \quad (IV.88)$$

qui consiste en une série globale prenant en compte les contributions de tous les vecteurs propres de la structure modifiée.

Remarquons que r_b^* peut contenir des informations redondantes, dues à une seule modification. Afin de s'assurer de garder des vecteurs indépendants et de ne sélectionner que les directions les plus appropriées de cette série de vecteurs calculée, on peut réaliser, comme exposée dans le cas de la méthode SRVE, une décomposition en valeurs singulières sur r_b^* telle que:

$$r_b^* = U \cdot \Sigma \cdot V^T \quad (IV.89)$$

“m”, $m < N$, directions dominantes peuvent être sélectionnées telle que :

$$r_b^* = U_1 \cdot \Sigma_1 \cdot V_1^T + U_2 \cdot \Sigma_2 \cdot V_2^T \quad (IV.90)$$

où : Σ_1 est une matrice diagonale de taille ($m \times m$) contenant les valeurs singulières les plus élevées en ordre décroissant ($\Sigma_1 = diag(\sigma_1 \dots \sigma_m)$). Les valeurs sont sélectionnées suivant un critère donné. Il est là aussi possible d'utiliser le critère (IV.72) présenté plus haut dans le paragraphe IV.4.2.1.1 et choisir U_1, Σ_1, V_1^T tels que:

$$\sigma_1 / \sigma_m \leq 10^{-5} \quad (IV.91)$$

On peut calculer une sous-base, relative au système modifié, par :

$$r_b = U_1 \Sigma_1 \quad (IV.92)$$

La méthode permet d'exprimer la solution de la structure modifiée en fonction des perturbations de raideur ΔK , présentes à travers B (IV.82), et de masse ΔM présentes à travers le vecteur initial r_v^1 (IV.87).

Nous remarquons que le vecteur propre de la structure nominale r_v^0 est bien présent dans cette base à travers le vecteur d'initialisation r_v^1 (IV.87). Les autres vecteurs de la série calculée peuvent donc être considérés comme des vecteurs d'enrichissement de la base nominale.

On peut ensuite écrire le problème réduit sous la forme :

$$K_r c = \lambda_v M_r c \quad (IV.93)$$

avec:

$$K_r = r_b^T K r_b \quad M_r = r_b^T M r_b \quad (IV.94)$$

et par la suite résoudre le problème aux valeurs propres du système réduit et obtenir les valeurs (λ_v) et vecteurs propres (c_v) .

Finalement, l'étape de reconstitution des résultats sur les ddls physiques globaux est réalisée par:

$$y = r_b^1 c_1 + r_b^2 c_2 + \dots + r_b^s c_s = r_b c \quad (\text{IV.95})$$

L'avantage de cette méthode réside dans le fait que pour une perturbation donnée, non pas un mais plusieurs vecteurs d'enrichissement sont calculés. Le nombre de ces vecteurs représente un « degré de liberté » supplémentaire, par rapport à la méthode SRVE. Celui-ci peut être ajusté afin d'améliorer la robustesse de la base des Approximations Combinées vis-à-vis des perturbations. Ceci permet au final d'améliorer considérablement les performances de la base de condensation tout en évitant de recalculer tous les vecteurs propres de la structure modifiée.

IV.2.3.2.2. *Extension de la méthode à la réanalyse approchée en sous-structuration*

Nous proposons dans ce paragraphe une extension de cette méthode à la sous-structuration en appliquant la démarche précédente à chaque sous-structure (k) d'un système préalablement décomposé.

Plusieurs méthodes de sous-structuration peuvent être utilisées dans ce sens. Nous envisagerons les cas des méthodes de Martinez et de Craig-Bampton, basée comme nous l'avons présenté au paragraphe IV.4.1.3, respectivement sur les modes normaux à interfaces libre et bloquée.

Le principe de l'estimation des vecteurs propres de chaque sous-structure modifiée en fonction des modifications structurales et des modes nominaux est le même que celui décrit précédemment. Le choix des types de modes normaux nominaux est lié au choix de la méthode de sous-structuration et détermine par la suite la formulation de la matrice de transformation en coordonnées généralisées, enrichie par la méthode des approximations combinées.

Comme nous l'avons évoqué, bien que la méthode de Martinez soit basée sur la méthode de Rubin et MacNeal, sa particularité consiste en l'analogie de la formulation de sa base de condensation avec la base de la méthode « primale » de Craig-Bampton. Ceci a pour conséquence d'assurer que le même procédé d'assemblage, pour le cas d'une utilisation de la méthode de Craig-Bampton ou celle de Martinez, est utilisé. Celui-ci repose, comme nous l'avons vu, sur la compatibilité des déplacements aux ddls d'interface.

Dans le cas général, commun aux méthodes de Martinez et de Craig-Bampton, on peut calculer les modes normaux, libres ou bloquées, d'une sous-structure en résolvant le problème aux valeurs propres suivant :

$$(K_0 - \lambda^0 M_0) y^0 = 0 \quad (\text{IV.96})$$

Ce problème correspond à la sous-structure nominale, à interface libre ou bloquée.

L'équilibre de la sous-structure modifiée, soumise aux seuls efforts de jonction f_j , peut s'écrire:

$$[(K_0 + \Delta K) - \lambda(M_0 + \Delta M)] y = f_j \quad (\text{IV.97})$$

Après multiplication à gauche par K_0^{-1} , et réorganisation de (IV.97), nous pouvons obtenir :

$$y = (I + B)^{-1} y^I + (I + B)^{-1} K_0^{-1} f_j \quad (\text{IV.98})$$

Comme remarqué précédemment, cette écriture n'est possible que sous la condition d'une matrice K_0 régulière. Ceci n'est pas le cas notamment dans une approche de Martinez où les modes normaux à interface libre sont utilisés. Une procédure de filtrage des ddls de corps rigide doit donc être envisagée. Dans le cas de l'approche de Craig-Bampton basée sur le calcul des modes normaux à interface bloquée, cette condition est satisfaite.

Comme introduit plus haut dans (IV.87), l'expression de y_I est:

$$y^I = \lambda K_0^{-1} (M_0 + \Delta M) y \quad (\text{IV.99})$$

que nous estimons par :

$$y^I = \lambda^0 K_0^{-1} (M_0 + \Delta M) r^0 \quad (\text{IV.100})$$

où: r^0 sont les vecteurs associés aux modes normaux de la sous-structure nominale. Ce qui permet d'approximer la solution de la structure modifiée par:

$$y \approx (I + B)^{-1} y^I + (I + B)^{-1} K_0^{-1} f_j \quad (\text{IV.101})$$

$$\text{où: } B = K_0^{-1} \Delta K \quad \text{et} \quad y^I \approx \lambda^0 K_0^{-1} (M_0 + \Delta M) r^0 \quad (\text{IV.102})$$

Comme indiqué précédemment, le vecteur associé au mode normal de la sous-structure nominale est présent à travers le vecteur d'initialisation y^I .

En négligeant les termes d'ordre supérieur, nous écrivons (IV.101) sous la forme :

$$y \approx (I + B)^{-1} y^I + K_0^{-1} f_j \quad (\text{IV.103})$$

A partir de là, nous pouvons écrire la solution approchée y du problème modifié sous la forme:

$$y \approx r_b c + R f_j \quad (\text{IV.104})$$

avec: $R = K_0^{-1}$ (K_0 étant régulière) et c est le vecteur des ddls modaux issus du problème réduit avec la démarche de la méthode des approximations combinées explicitées plus haut pour le cas de la condensation directe.

En découpant (IV.104) en fonction des ddls internes, présentés par l'indice « i » et de jonction, présentés par l'indice « j », on peut la réécrire ainsi:

$$\begin{bmatrix} y_j \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{b,j} \\ r_{b,i} \end{bmatrix} c + \begin{bmatrix} R_{jj} & R_{ji} \\ R_{ij} & R_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_j \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.105})$$

Les solutions sur les ddls internes sont exprimées en fonction des termes relatifs aux jonctions avec :

$$y_i = R_{ij} R_{jj}^{-1} y_j + (r_{b,i} - R_{ij} R_{jj}^{-1} r_{b,j}) c \quad (\text{IV.106})$$

qui peut également s'écrire:

$$\begin{bmatrix} y_j \\ y_i \end{bmatrix} = T_{GCA} \cdot \begin{bmatrix} y_j \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{jj} & 0 \\ \Phi_1 & \Phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_j \\ c \end{bmatrix} \quad (\text{IV.107})$$

$$\text{où: } \Phi_2 = R_{ij} R_{jj}^{-1}, \quad \Phi_2 = (r_{b,i} - R_{ij} R_{jj}^{-1} r_{b,j}) \quad (\text{IV.108})$$

Afin d'assurer un rang maximal pour cette base de réduction, une décomposition en valeur singulière est effectuée sur Φ_2 de telle sorte à garder les directions relatives aux valeurs singulières les plus élevées.

La formulation de la base enrichie des approximations combinées généralisées, adaptée à la sous-structuration, a au final la même forme que celles issues des méthodes de Craig-Bampton et de Martinez. Cette écriture a les avantages suivants :

- partir des vecteurs des modes normaux, libres, utilisés dans la méthode de Martinez, ou bloqués, utilisés dans la méthode de Craig-Bampton,
- Comme nous l'avons indiqué précédemment, la méthode de Martinez est conçue pour s'affranchir des coordonnées généralisées des efforts de jonction, présents dans les méthodes de type MacNeal ou Rubin desquelles elle est issue. Ceci rend son assemblage analogue à celui d'une méthode « primale », telle que la méthode de Craig-Bampton, qui se réalise avec la simple condition de continuité du déplacement au niveau des ddl de jonction. Par son écriture, la méthode des approximations combinées généralisées, adaptée aux deux approches de sous-structuration, préserve cette propriété d'assemblage.

La différence principale entre l'utilisation des modes normaux à interface libre ou bloquée dans la mise en œuvre de la méthode des approximations combinées généralisées, réside dans le choix des vecteurs r^o . Une deuxième différence réside dans la précaution de filtrage d'éventuels modes de corps rigide lors de l'utilisation des modes normaux libres dans la méthode de Martinez.

Après les phases d'assemblage et de résolution du problème aux valeurs propres, la phase de restitution sur chacune des sous-structures sur leurs ddl physiques globaux est finalement effectuée.

Le gain principal de la méthode consiste dans le fait qu'une base de réduction du système modifié n'est pas systématiquement recalculée. Une décomposition en série binomiale de quelques modes issus des modes normaux (libres ou bloqués) de la sous-structure nominale est utilisée. Ceci permet d'obtenir au final une base robuste.

IV.3. Propagation des incertitudes avec un modèle réduit

Dans la suite de ce travail, nous illustrons les résultats de certains calculs effectués afin de juger de la qualité et des performances de certaines méthodes que nous avons exposées plus haut.

Nous exposons à travers le cas d'un exemple académique, les choix que nous avons retenus concernant la propagation des incertitudes. Il s'agit d'abord de justifier et d'illustrer :

- un critère de convergence concernant la méthode de Monte Carlo,
- la méthode de propagation des incertitudes avec réduction de modèle. Nous justifions ainsi notre choix de simuler les incertitudes sur le modèle nominal complet, par rapport aux travaux de Soize

[128], Chebli *et al.* [27], Capiiez-Lernout *et al.* [22], dans lesquels ces incertitudes sont simulées sur le modèle nominal réduit.

Nous illustrons ensuite, sur le même cas académique, l'intérêt des méthodes d'enrichissement des bases de réduction que nous utiliserons lors d'approches de réanalyse approchée. Ceci passe d'abord par l'étude du domaine de validité de la robustesse de la base nominale d'une méthode standard de type Craig-Bampton vis-à-vis de moyennes ou grandes perturbations.

Enfin, nous discutons d'une technique permettant d'établir un lien entre les niveaux de dispersion introduits par les méthodes paramétrique et non-paramétrique de modélisation des incertitudes. Ces deux méthodes sont en effet celles qui sont retenues dans ce travail. Comme nous l'avons évoqué précédemment, si la méthode paramétrique a l'avantage de qualifier, au sens de l'ingénieur, les niveaux de perturbations des paramètres, il n'en est pas de même pour la méthode non-paramétrique. Une solution est discutée dans ce travail pour pallier à ce problème.

IV.3.1. Description du modèle d'étude

Le modèle académique étudié est présenté dans la figure Fig.IV.7. Il s'agit du modèle d'une structure de portique naturellement encastree. Le maillage est réalisé sur le logiciel éléments finis PATRAN avec des éléments de type poutre à 2 noeuds à 6 ddl's chacun. Le MEF comprends au total 426 ddl's.

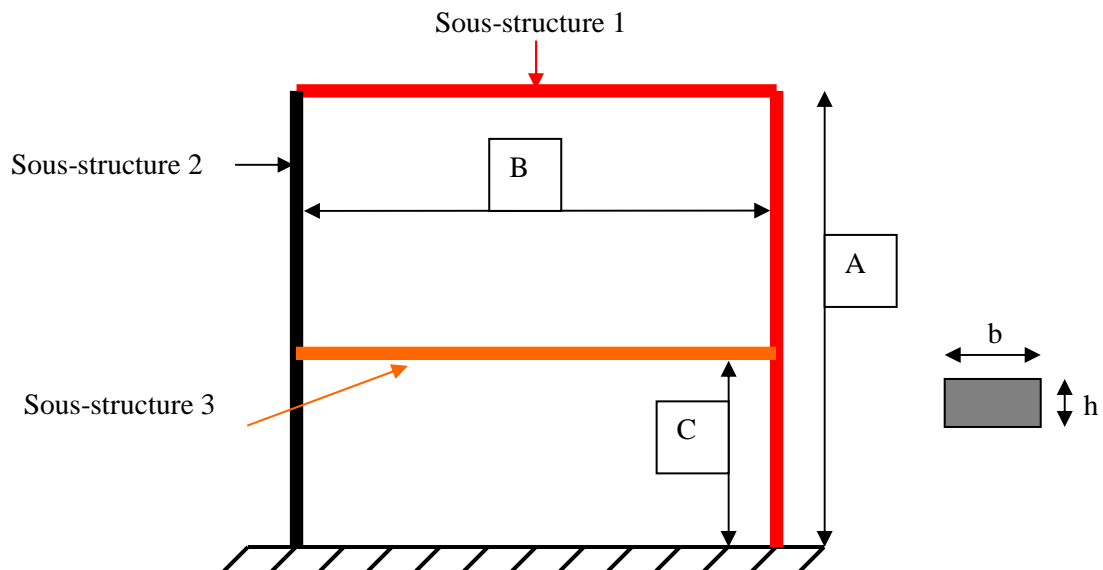


Fig IV. 7: Description du modèle académique

A (mm)	B (mm)	C (mm)	b (mm)	h (mm)	E (MPa)	ν (Coef. Poisson)	ρ Densité (kg.m ⁻³)
1000	1000	300	20	15	$2.1.10^5$	0.3	7800

Tab IV. 1: Propriétés du modèle académique

Les dimensions de la structure sont consignées dans le tableau tab IV.1. La section des éléments utilisés est de type rectangulaire de dimensions b et h .

Pour une application en sous-structuration, le modèle est préalablement décomposé en 3 sous-structures comme illustré Fig.IV.7. Nous avons choisi d'introduire des perturbations uniquement sur les sous-structures 1 et 2. Par ailleurs, seules ces deux zones seront condensées au cours des processus de réduction de modèle et de réanalyse.

IV.3.2. Convergence d'une simulation de type Monte Carlo

Le principal problème introduit par une simulation de type Monte Carlo est de savoir au bout de quel nombre de tirages la convergence est elle rencontrée. Le seul moyen de s'assurer d'une convergence correcte est de réaliser un nombre de simulations très conséquent. D'une manière générale, les auteurs s'accordent à dire qu'une méthode totalement fiable pour juger si la convergence est atteinte n'existe pas. Néanmoins, nous pouvons citer d'après [109] des méthodes qui donnent un moyen de contrôler cette convergence. Parmi ces techniques, nous citons le critère de la convergence de la moyenne actualisée ou celui des sommes cumulées, qui finalement se basent sur la même idée.

En reprenant l'idée du critère de la convergence des moyennes actualisées, nous construisons une variable $Conv(n)$ évoluant en fonction du nombre de tirages n de la simulation de Monte Carlo telle que :

$$Conv(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_s \quad (IV.109)$$

Où V_s est un scalaire représentant la variation de la réponse $y(f, \theta_j)$, dépendant la fréquence f et de l'aléa θ et construit tel que:

$$V_s = \int_f \|y(f, \theta_j)\|^2 df \quad (IV.110)$$

Au final, ce critère ne permet qu'une estimation de la convergence des réponses. C'est pourquoi, il sera appliqué avec la précaution de vérifier si ces valeurs se stabilisent assez longtemps sur plusieurs tirages aléatoires.

Nous illustrons l'application de ce critère sur le cas d'une poutre encastrée-encastrée (Fig IV.8) dont le module de Young est choisi comme paramètre incertain.

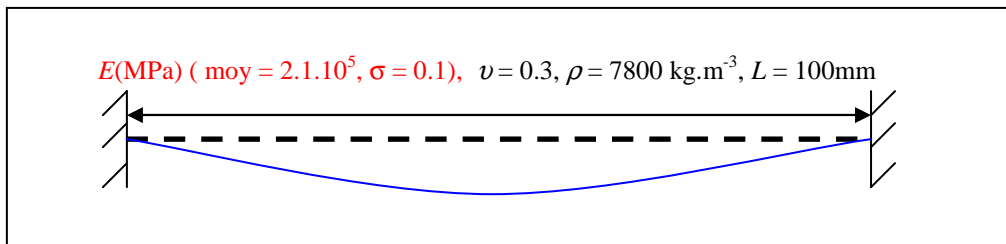


Fig IV. 8: Premier mode d'une poutre encastrée-encastrée

Une loi de probabilité normale, de moyenne ($\text{moy} = 2.1.10^5 \text{ MPa}$) et d'écart type ($\sigma = 0.1$) est associée à ce paramètre incertain.

Dans cet exemple, nous prenons :

$$V_s = \omega_1 = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\text{IV.111})$$

qui correspond à la première pulsation propre de la poutre.

Le tracé du critère de convergence (IV.109) en fonction du nombre de tirages de la simulation de Monte Carlo est illustré Fig IV.9.

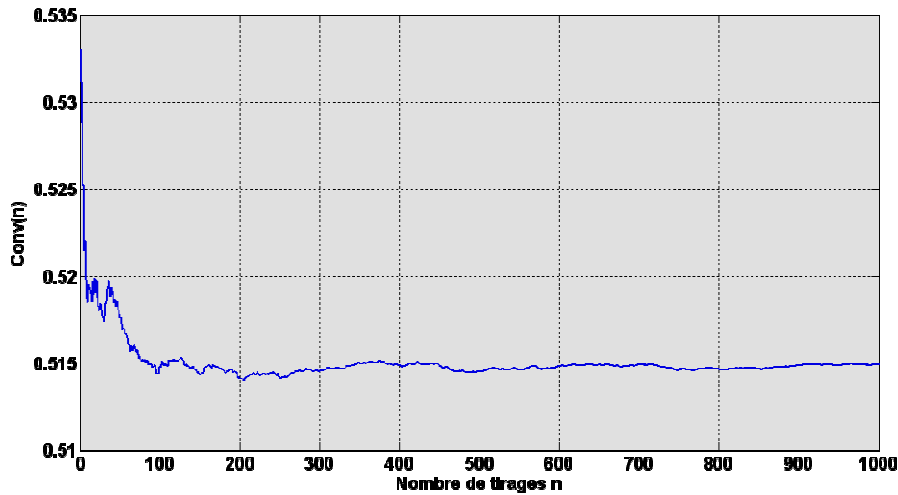


Fig IV. 9: Illustration du critère de convergence d'une simulation de type Monte Carlo : cas d'une poutre encastrée-encastrée

Nous observons une stabilisation du critère de convergence au bout de 100 tirages. Cette tendance se confirme au-delà de cette valeur. La convergence est donc jugée atteinte pour $n = 100$ tirages. Un nombre de réalisations plus élevé (2 ou 3 fois cette valeur) peut être choisi afin de garantir une bonne stabilisation du critère.

IV.3.3. Stratégie de propagation retenue

Nous avons montré précédemment que la propagation des incertitudes par des méthodes stochastiques, en particulier les méthodes paramétrique, non-paramétrique ou une approche hybride combinant les deux, pouvait être coûteuse en termes de ressources de calculs, notamment à cause de la taille des MEF. C'est pourquoi réaliser une telle étude dans un contexte de réduction de modèle s'avère être souvent incontournable [128, 27, 22]. Comme nous l'avons montré FigIV.6, outre un calcul de réanalyse sur le modèle exact, 2 voies sont envisageables pour réaliser une réanalyse approchée:

- partir de la base de réduction du modèle nominal, construite une seule fois, et réduire les modèles perturbés à travers elle,
- partir de la base de réduction du modèle nominal en y ajoutant une amélioration en fonction des perturbations introduites (méthodes d'enrichissement par vecteurs de résidus statiques (SRVE) ou méthode des approximations combinées généralisées (GCA)).

Nous confronterons les deux approches sur des cas numériques dans la suite de ce travail.

Nous pouvons citer également les travaux de Soize [128], de Chebli [27] et de Capiez-Lernout *et al.* [22] qui suivent une autre vision pour propager les incertitudes, en particulier par une méthode non-paramétrique, dans un contexte de réduction de modèle. La démarche développée dans ces travaux consiste à commencer par s'affranchir du problème de la taille du MEF avant de propager les incertitudes. L'idée est donc de commencer par réduire le modèle nominal en utilisant une méthode de sous-structuration de Craig-Bampton [27] ou en utilisant une base modale tronquée [128, 27] T_0 .

$$y_0(\omega) = T_0 c_0(\omega) \quad (\text{IV.112})$$

où : $y_0(\omega)$, $c_0(\omega)$ sont respectivement les vecteurs des ddls physiques et des coordonnées généralisées du problème nominal.

La propagation des incertitudes, par la méthode non-paramétrique notamment, est ensuite réalisée à partir de ce modèle réduit :

$$(K_{0,r} - \omega^2 M_{0,r}) c_0(\omega) = F_{0,r}(\omega) \quad (\text{IV.113})$$

L'indice « r » introduit sur les matrices de masse, de raideur et sur le vecteur de force correspondent aux matrices réduites.

A partir des matrices réduites $K_{0,r}$ et $M_{0,r}$, réelles, symétriques et définies positives, des matrices aléatoires réduites sont introduites :

$$(K_r^{nparam} - \omega^2 M_r^{nparam}) c(\omega) = F_{0,r}(\omega) \quad (\text{IV.114})$$

La réponse réduite obtenue pour chaque perturbation du système aléatoire, est ensuite restituée par :

$$y^{nparam}(\omega) = T_0 c(\omega) \quad (\text{IV.115})$$

La méthode a l'avantage de s'affranchir de la taille des MEF dès le départ. Ceci a pour conséquence de réduire les temps liés à la mise en œuvre de la méthode non-paramétrique et à la résolution des problèmes aux valeurs propres.

Cela dit, nous nous posons la question de la limite de validité de cette méthode pour des niveaux de dispersion importants ou même moyens. En effet ; l'introduction de perturbation sur le modèle réduit, au risque de ne plus avoir accès à tous les ddls physiques, n'a *a priori* pas les mêmes conséquences que de l'introduire sur le modèle exact. De plus, un même niveau de dispersion n'a pas le même sens physique en étant introduit sur les modèles exact ou réduit. C'est ce que nous allons discuter dans la suite de ce travail. Nous choisissons d'utiliser la méthode de sous-structuration comme la méthode de sous-structuration standard.

En partant du modèle de la structure académique décrite plus haut, nous propageons les incertitudes par la méthode non-paramétrique sur :

- le modèle nominal réduit par la méthode de Craig-Bampton construite une fois au préalable;
- le modèle exact perturbé et ensuite réduit par la méthode de Craig-Bampton. Nous considérons les résultats de ce calcul comme des résultats de référence.

Nous comparons ces approches avec deux niveaux de dispersion, à savoir un niveau de $\delta_K = 0.05$ sur la raideur, considéré comme faible, et un niveau de $\delta_K = 0.075$ considéré comme moyen. La comparaison se fait, pour chaque mode, en calculant le MAC entre les vecteurs propres du modèle exact perturbé et du modèle réduit perturbé. Un calcul des écarts fréquentiels relatifs du modèle réduit perturbé par rapport au modèle exact est également réalisé.

- **Construction de la base de Craig-Bampton nominale.**

Le modèle global est décomposé en 2 sous-structures à réduire. Nous nous intéressons au comportement dynamique de ce modèle dans la bande fréquentielle $[0 ; F_{\max}] = [0 ; 500]$ Hz. Nous montrons dans un premier temps que le choix du nombre de modes à interface bloqué est déterminant dans l'utilisation de la méthode de Craig-Bampton. La figure IV.10 illustre la confrontation entre la base modale issue du calcul exact et celle issue du calcul par méthode de Craig-Bampton. Dans la figure IV.10 - a -, les modes à interface bloquée, pris pour chaque sous-structure, représentent une base tronquée dans la bande fréquentielle $[0 ; 1.5 \cdot F_{\max}]$ de la solution du problème aux valeurs propres de la sous-structure bloquée à la jonction.

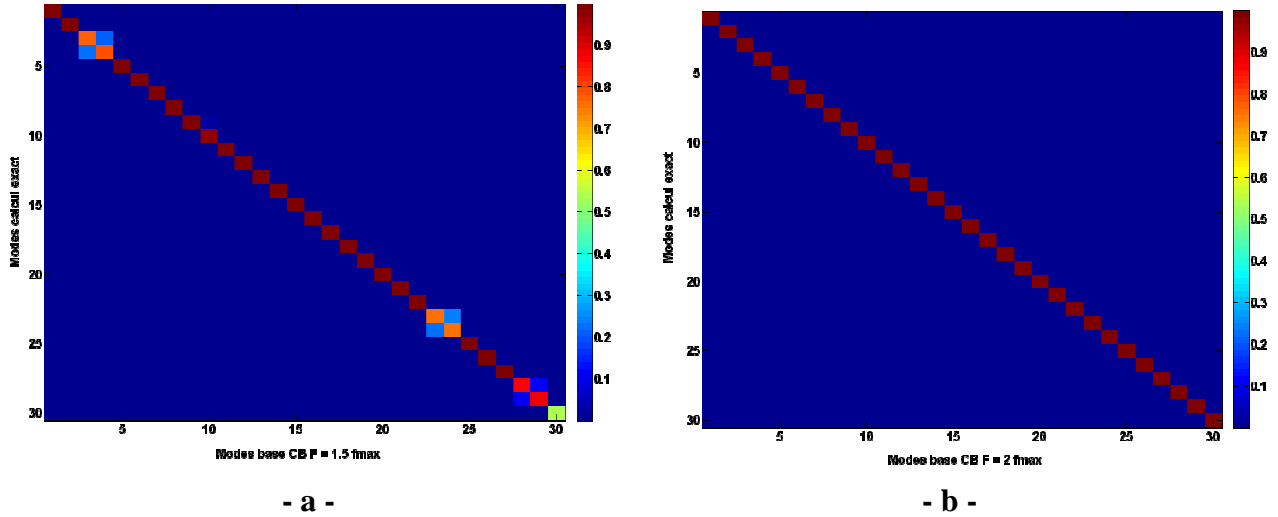


Fig IV. 10: Effet du choix du nombre de modes normaux sur la base de réduction de Craig-Bampton

Avec ce nombre de modes, les bases de Craig-Bampton ne sont pas assez prédictive du comportement du modèle exact, notamment des modes 3, 4, 23, 24 et 30. La prise en compte des modes à interface bloquée compris dans la bande $[0, 2 \cdot F_{\max}]$ est suffisante pour assurer une bonne prédiction de la méthode de Craig-Bampton. Les écarts fréquentiels par rapport au calcul de référence sont inférieurs à 0.5%. Le taux de réduction correspondant à ce choix de nombre de vecteurs est de 67%.

- **Perturbation avec un niveau de dispersion $\delta_k = 0.05$.**

Nous introduisons la notion d'intervalle de confiance que nous allons utiliser par la suite.

On tente de définir un intervalle $[INFm; SUPm]$ dans lequel les valeurs m , issues d'un échantillon de données $[MINm; MAXm]$, ont un niveau $0 < N_c < 1$ de confiance d'y être.

La définition de cet intervalle peut donc s'écrire de la manière suivante :

$$P(INFm \leq m \leq SUPm) = N_c \quad (IV.116)$$

La borne supérieure est construite à partir de l'inégalité de Chebychev suivante:

$$P[|m - mean(m)| \geq \varepsilon] \leq \frac{\sigma^2(m)}{\varepsilon^2} \quad (IV.117)$$

Avec : $mean(m)$ et $\sigma(m)$ respectivement les moyenne et écart type des valeurs de m . Le paramètre $\varepsilon > 0$ est donné en fonction du niveau de confiance N_c tel que :

$$N_c = 1 - \frac{\sigma(m)^2}{\varepsilon^2} \quad (IV.118)$$

Après développement, la borne supérieure est donnée par :

$$SUPm = mean(m) + \frac{\sigma(m)}{\sqrt{1 - N_c}} \quad (IV.119)$$

La borne inférieure est donnée par [27] :

$$INFm = mean(m) - \frac{(mean(m))^2}{SUPm} \quad (IV.120)$$

Le niveau de confiance est généralement pris à $N_c = 96\%$.

Le niveau de dispersion non-paramétrique introduit sur la matrice de raideur correspond à $\delta_K = 0.05$. La simulation des perturbations se base sur des tirages de type Monte Carlo. Afin d'estimer la convergence de ceux-ci, nous utilisons le critère de la convergence de la moyenne défini dans le paragraphe IV.3.2. La figure Fig IV.11 montre une stabilisation du critère à partir de $n = 2000$ simulations, dans le cas de la perturbation du modèle exact. Nous estimons qu'une bonne convergence est atteinte pour $n = 3000$ tirages où nous arrêtons le calcul. Les résultats de la dispersion sur les MAC et sur les écarts fréquentiels relatifs par rapport au calcul de référence (base de Craig-Bampton actualisée pour chaque problème modifié) sont donnés figure Fig.IV.12.

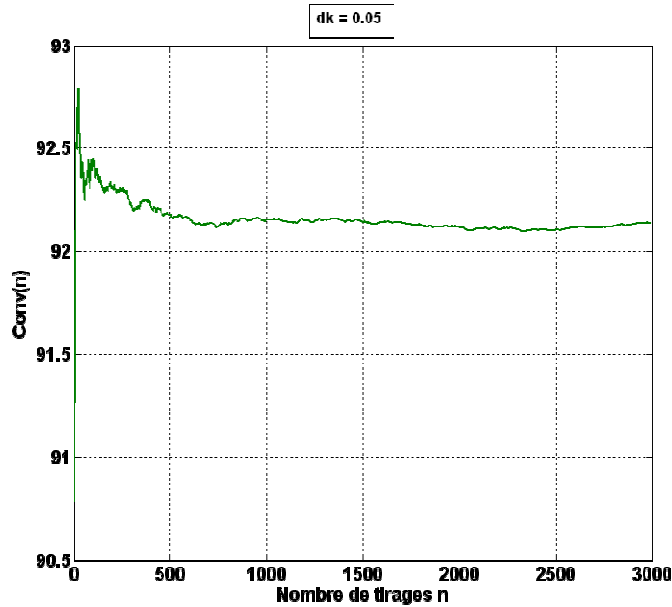


Fig IV. 11: Critère de convergence de la simulation Monte Carlo - $\delta_K = 0.05$

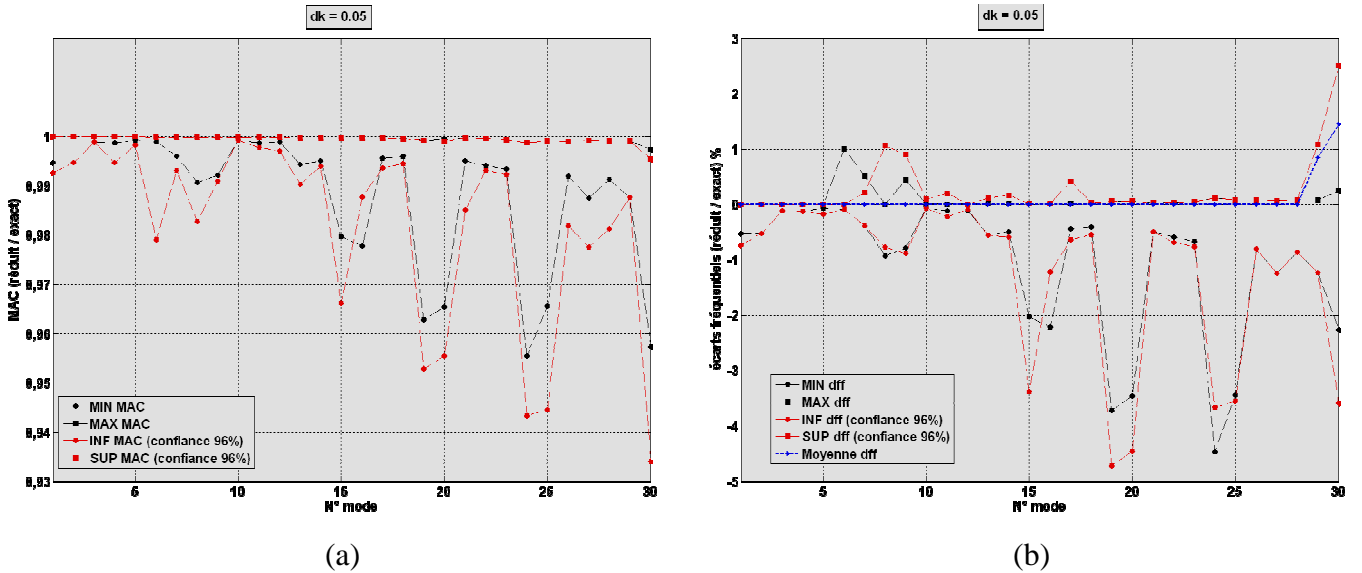


Fig IV. 12: Intervalles de confiance et dispersion des MAC et des écarts fréquentiels pour $\delta_k = 0.05$

Nous pouvons remarquer que les intervalles de confiance à 96% définis par [INF ; SUP] sont suffisamment représentatifs des statistiques extrêmes représentées par les valeurs minimum et maximum [MIN ; MAX] et ce dans les cas des écarts fréquentiels et des MAC. Nous pouvons remarquer également que la variation de ces écarts fréquentiels et des MAC est relativement faible. Les MAC (Fig. IV.12 (a)) restent aux alentours de 0.94 dans les cas les plus extrêmes pour les modes 25 ou 30 par exemple. Ceci représente un écart raisonnable. La variation des écarts fréquentiels (Fig. IV.12 (b)) restent elle aussi dans cette limite de [-5 ; 5] % qu'on peut tolérer. Autrement dit, la manière de procéder selon laquelle les perturbations sont introduites sur le modèle nominal réduit est assez prédictive des variations exactes du modèle. Notons que la base de Craig-Bampton utilisée pour réduire les deux sous-structures du modèle contient des modes normaux de fréquences comprises dans $[0 ; 2 \cdot F_{\max}]$, F_{\max} étant la fréquence supérieure de la bande d'analyse. Ceci dit, si les écarts observés sont raisonnablement bas, ils ne doivent pas pour autant être négligés. En effet ; le niveau de dispersion introduit dans cet exemple est relativement faible ($\delta_k = 0.05$). Il est intéressant de voir comment évoluent ces écarts si le niveau de dispersion considéré est supérieur. C'est ce que nous allons voir avec l'exemple suivant où le niveau de dispersion introduit est de $\delta_k = 0.075$.

- Perturbation avec un niveau de dispersion $\delta_k = 0.075$

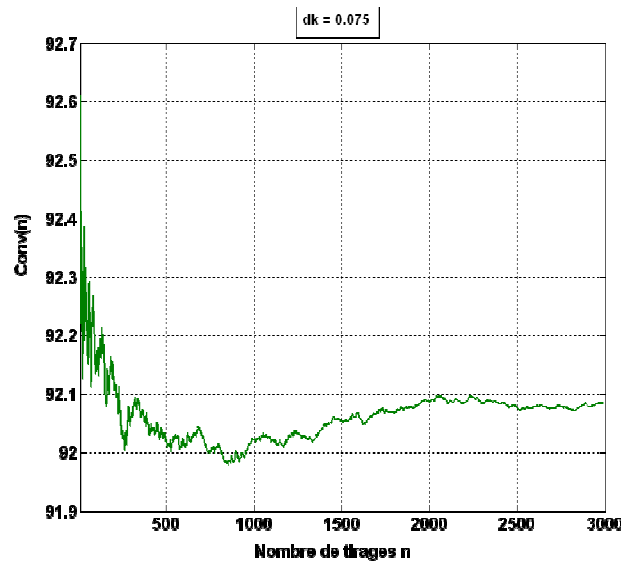


Fig IV. 13: Critère de convergence de la simulation Monte Carlo - $\delta_k = 0.075$

Comme pour le cas précédent, où $\delta_k = 0.05$, nous utilisons le critère de convergence pour estimer un nombre suffisant de simulations de Monte Carlo. Un début de stabilisation est observé aux alentours de $n = 2000$ tirages (Fig IV.13). Nous décidons d'arrêter la simulation à $n = 3000$.

Sur les figures Fig IV.14 nous observons d'abord que les intervalles de confiance à 96% sont suffisamment représentatifs des statistiques extrêmes de la variation des MAC et des écarts fréquentiels du modèle réduit perturbé par rapport au modèle exact. La figure Fig IV.14 (a) illustre le cas où les bases de Craig-Bampton utilisées contiennent un nombre de modes compris dans la bande $[0 ; 2 \cdot F_{\max}]$. Les écarts avec le modèle exact perturbé deviennent dans ce cas significatifs. En effet ; à partir du 6^{ème} mode, les écarts en fréquence sont de l'ordre de 10% en valeurs supérieures et augmentent jusqu'à atteindre $[-16 ; +19] \%$ pour le mode 30. Cette tendance d'accroissement de l'écart se confirme avec les variations des MAC qui peuvent atteindre 0.72 pour le mode 15 et 0.5 pour le mode 28. Dans la figure Fig IV.14 (b), nous tentons de réduire cet écart en augmentant la taille des bases de Craig-Bampton en prenant cette fois ci tous les modes de la bande $[0 ; 3 \cdot F_{\max}]$ pour chaque sous-structure. Notons que ceci cause une diminution du taux de réduction qui passe de 67% à 60%. Des écarts significatifs persistent malgré tout et seule une légère amélioration est observée. La figure Fig IV.15 illustre cette amélioration sur les MAC, qui passent de 0.72 à 0.96 pour le mode 15 mais qui restent à des niveaux bas au-delà. La même tendance est observée pour les écarts en fréquence qui ne sont que faiblement corrigés et peuvent atteindre $[-10 ; +16] \%$ par rapport au modèle exact perturbé. Autrement dit, avec l'augmentation du niveau de perturbation (de $\delta_k = 0.05$ à $\delta_k = 0.075$), le procédé d'introduction de perturbations sur le modèle nominal réduit n'est plus prédictif des variations du modèle exact.

Il est *a priori* envisageable que ces écarts continueront à augmenter avec l'augmentation du niveau de dispersion considéré. Nous remarquons également que l'augmentation du nombre de modes des bases de Craig-Bampton introduit une amélioration, assez monotone, mais qui cause par ailleurs la diminution du taux de réduction.

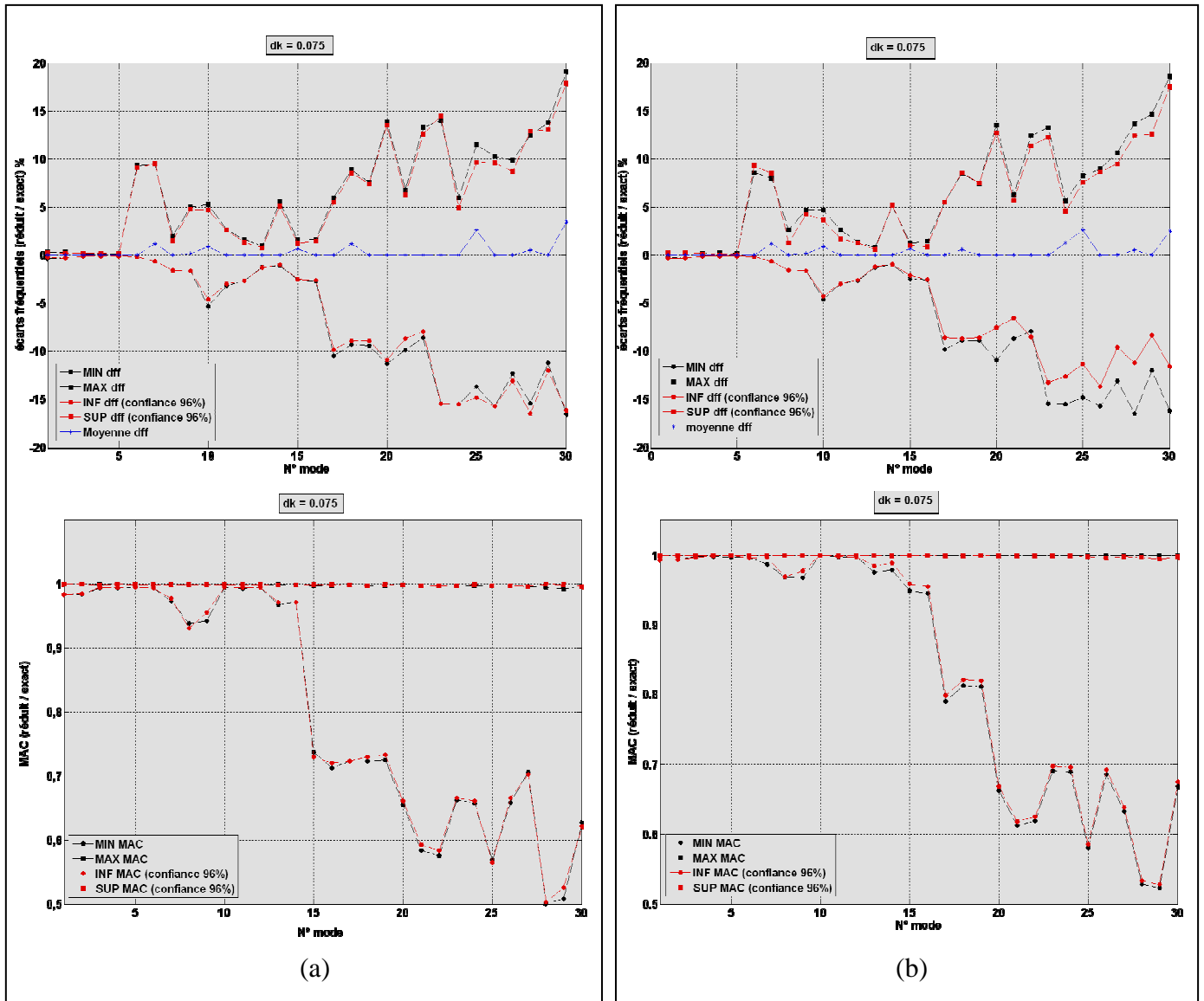


Fig IV. 14: Intervalles de confiance et dispersion des MAC et des écarts fréquentiels
(cas des bases de Craig-Bampton (a)- $2 \cdot F_{\max}$, (b)- $3 \cdot F_{\max}$)

Nous pouvons conclure quant à la limitation de l'utilisation du procédé de perturbation sur le modèle nominal réduit avec des précautions de faible dispersion. Remarquons ceci dit que la méthode reste prédictive pour les 5 premiers modes dont les fréquences nominales sont comprises dans $[0, 40]$ Hz.

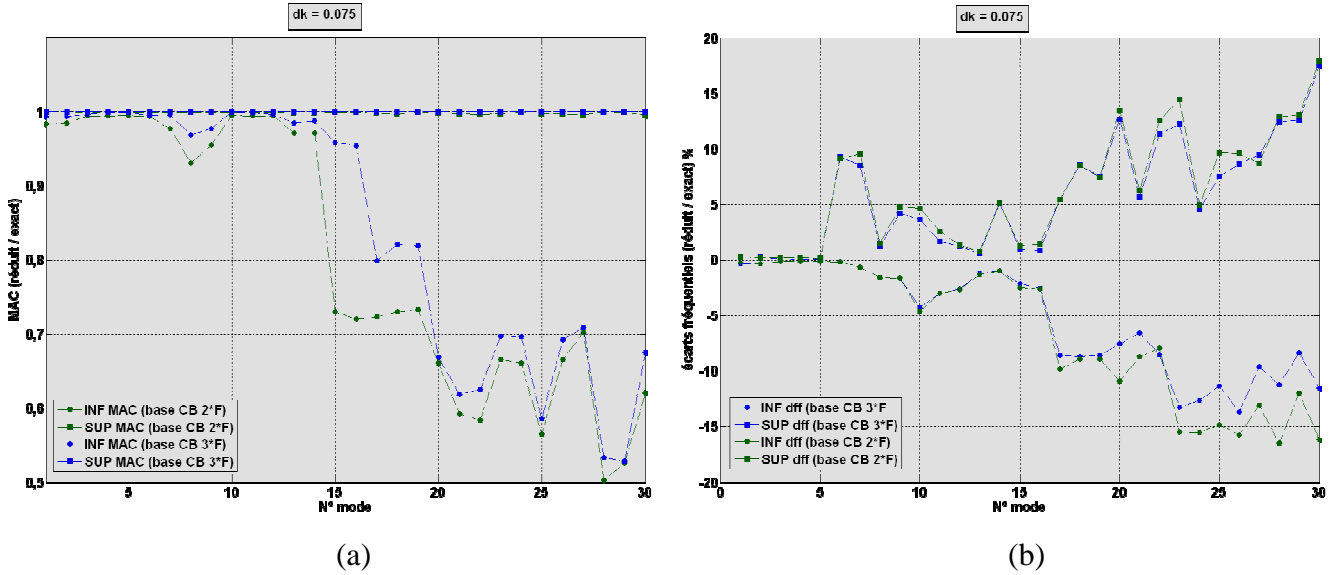


Fig IV. 15: Evolution de la robustesse de la base de CB nominale en fonction du nombre de modes (cas : $2 \cdot F_{max}$ (vert) et $3 \cdot F_{max}$ (bleu))

Pour ces raisons, nous avons fait le choix de ne pas procéder de cette manière pour propager les incertitudes, notamment par la méthode non-paramétrique. Rappelons au passage que ce procédé ne peut être envisagé pour le cas d'une méthode paramétrique où toute l'information sur les paramètres, liés aux ddl physiques, est perdue après réduction du modèle nominal.

Nous propageons dans la suite de ce travail les incertitudes, par les méthodes non-paramétriques et paramétriques, sur le modèle complet avant réduction par la méthode de Craig-Bampton. Pour garder un taux de réduction satisfaisant tout en garantissant une prédiction correcte, nous fixons les tailles des bases de Craig-Bampton par le critère $[0 ; 3 \cdot F_{max}]$, F_{max} étant la fréquence maximale de la bande d'analyse.

IV.3.4. Lien entre les niveaux de dispersion des approches paramétrique et non-paramétrique

Nous avons évoqué que le principal point difficile qu'introduit la méthode non-paramétrique réside dans le choix du niveau de dispersion. En effet ; contrairement à une méthode paramétrique qui qualifie les dispersions directement sur les paramètres en les considérant comme des variables aléatoires régies *a priori* par une loi de probabilité donnée, il n'en est pas de même pour la méthode non-paramétrique. Celle-ci propage les incertitudes de manière globale sur les matrices du MEF en les considérant comme des matrices aléatoires dont la dispersion est régie par un paramètre réel positif. Ceci rend donc la méthode non-paramétrique moins évidente « à paramétrer » au sens de l'ingénieur. Nous citons également une technique proposée par Capiez-Lernout *et al.* [22] que nous allons exposer ici et appliquer à un cas académique.

L'idée de cette technique consiste à construire une fonction coût liant les niveaux de dispersion des sorties (fréquences propres ou normes des réponses), issues des méthodes paramétrique et non-paramétrique, et de la minimiser.

Nous choisissons pour illustrer cette technique de considérer ω_1^{par} et ω_1^{npar} les premières fréquences propres du système perturbé respectivement par les méthodes paramétrique et non-paramétrique. Il s'agit donc de deux variables aléatoires dont les fonctions de densité de probabilité sont

respectivement : $p_{\omega_1^{par}}$ et $p_{\omega_1^{npar}}$. Ce sont ces deux dernières grandeurs qui sont comparées via la fonction coût $J(\delta_M, \delta_K)$ fonction des paramètres de dispersion de masse et de raideur δ_M, δ_K suivante :

$$J(\delta_M, \delta_K) = \frac{\|p_{\omega_1^{npar}}(\delta_M, \delta_K) - p_{\omega_1^{par}}\|_{L^2}}{\|p_{\omega_1^{par}}\|_{L^2}} \quad (IV.121)$$

avec $\|f\|_{L^2}$ la norme définie de la manière suivante :

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_{\Re} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad (IV.122)$$

Il s'agit ensuite de trouver les paramètres de dispersion (δ_M, δ_K) minimisant cette fonction.

Nous appliquons cette démarche au cas académique du portique présenté plus haut. A partir de la structure nominale, entièrement en acier, nous choisissons de considérer son module de Young comme unique paramètre incertain. Nous lui affectons une loi de distribution uniforme dont les bornes sont $[-15 ; +15] \%$. Plusieurs niveaux de dispersion non-paramétriques ont été envisagés, à savoir : $[0.01 ; 0.03 ; 0.05 ; 0.07 ; 0.09 ; 0.11 ; 0.13 ; 0.15 ; 0.17 ; 0.19]$. Pour chaque niveau de dispersion, 3000 calculs ont été réalisés.

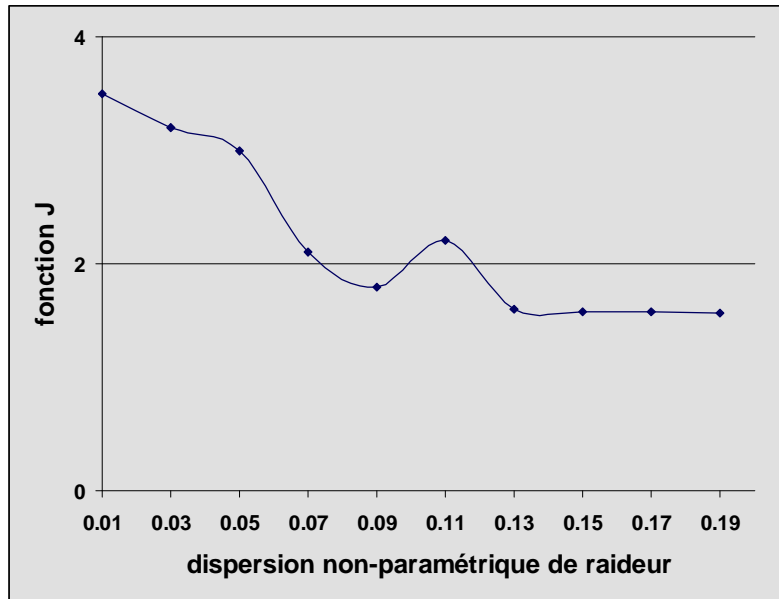


Fig IV. 16: Identification du niveau de dispersion non-paramétrique

Nous remarquons dans la figure Fig IV.16 qu'un minimum stable de la fonction coût $J(\delta_K)$ est atteint à partir de $\delta_K = 0.13$. Ceci signifie que ce niveau dispersion non-paramétrique correspond au mieux au niveau de dispersion paramétrique défini par la loi de probabilité liée au paramètre incertain choisi.

Cette méthode a le mérite d'établir un lien entre une dispersion d'origine paramétrique et le niveau de dispersion non-paramétrique qui lui est associé. Elle est utile dans le cas où l'étude d'incertitude est menée simultanément par les méthodes paramétrique et non-paramétrique sur la même zone de la

structure en question. En effet ; Soize [128] part du principe que les effets des incertitudes modélisées par voie non-paramétrique englobent les effets de variations des paramètres incertains en plus des effets des incertitudes de modélisation. Cela dit, cette manière de procéder n'estime pas avec exactitude les dispersions d'origine non-paramétrique. On peut constater par exemple Fig IV.16 que le minimum de la fonction coût se stabilise et reste constant au-delà de $\delta_k = 0.13$ ce qui pose la question du choix exact de ce dernier parmi cette plage stable. De plus, le principal inconvénient de cette méthode réside dans le fait qu'un nombre colossal de simulations est réalisé pour construire la fonction coût. En effet ; pour chaque niveau de dispersion $n = 3000$ tirages ont été par exemple réalisés pour ce cas simple.

Ce protocole est pratiquement inexploitable pour un modèle de grande taille et un nombre important de paramètres.

Par ailleurs, la technique devient inadaptée lorsque l'étude d'incertitude par voie non-paramétrique est réalisée indépendamment de l'approche paramétrique. Ceci est le cas dans une approche hybride où ces deux méthodes de propagation des incertitudes sont appliquées en fonction des propriétés des zones de la structure.

Nous citons comme exemple le cas de la structure industrielle du stator ferroviaire que nous étudions dans ce travail. Les cercles de phase et les têtes de bobines sont des zones privilégiées où l'approche non-paramétrique sera utilisée et où l'approche non-paramétrique pose un problème d'application à cause de la méconnaissance des niveaux à introduire *a priori* sur les paramètres. L'intérêt de la technique présentée ici est de pouvoir se baser sur un niveau de dispersion paramétrique « *a priori* connu » ou qui a du moins un sens pratique (tolérances sur l'épaisseur d'une pièce, variation de la fraction volumique d'une résine, variation du module de Young d'une tôle laminée, présence quantifiée *a priori* de contraintes résiduelles dans une soudure...etc). Or en réalité les paramètres dans certaines zones du stator représentent une image homogène d'une réalité physique plus complexe. Leur introduire un niveau d'incertitude paramétrique, notamment pour les coefficients de cisaillement, n'est pas aisé.

Pour ces raisons, nous avons préféré fixer directement des niveaux de dispersion non-paramétriques *a priori* assez élevés sur ces zones sans nous baser sur la technique présentée plus haut.

L'approche idéale pour une phase de conception serait d'avoir un tableau de correspondance entre des incertitudes liées à des phénomènes incertains (choix du type de paramètre, conditions de fixations, phénomènes de d'interface) et des niveaux, du moins des ordres de grandeur, de dispersions non-paramétriques équivalents.

IV.4. Simulation numérique

Dans ce chapitre, nous mettons en œuvre, à travers deux exemples numériques, les méthodologies que nous avons exposées précédemment concernant :

- les méthodes d'amélioration de la robustesse des méthodes de réduction (essentiellement la méthode généralisée des approximations combinées (GCA) que nous avons adaptée à la sous-structuration) pour une approche en réanalyse approchée.
- la méthode hybride de propagation des incertitudes,

Dans la première application, nous jugeons les performances des méthodes de réduction dans les cas de la propagation des incertitudes par les méthodes paramétrique et non-paramétrique. Nous choisirons à l'issue des résultats la méthode la plus adaptée et la plus robuste lors de l'utilisation de ces deux méthodes.

Dans la deuxième application qui correspond au cas industriel, nous appliquons la méthodologie globale de propagation des incertitudes par approche hybride dans le contexte de réanalyse approchée en utilisant la méthode de réduction la plus robuste.

Nous tirerons au final des conclusions intéressant le fabricant du stator sur les effets obtenus des incertitudes sur la variabilité des réponses dynamiques.

IV.4.1. Cas d'un exemple académique

IV.4.1.1. Modèle de propagation des incertitudes

Le cas académique utilisé ici correspond au portique dont nous avons exposé la modélisation au paragraphe IV.5.1. Ce dernier est décomposé en 3 sous-structures dont deux d'entre elles sont perturbées et réduites.

- Modèle choisi pour l'approche paramétrique

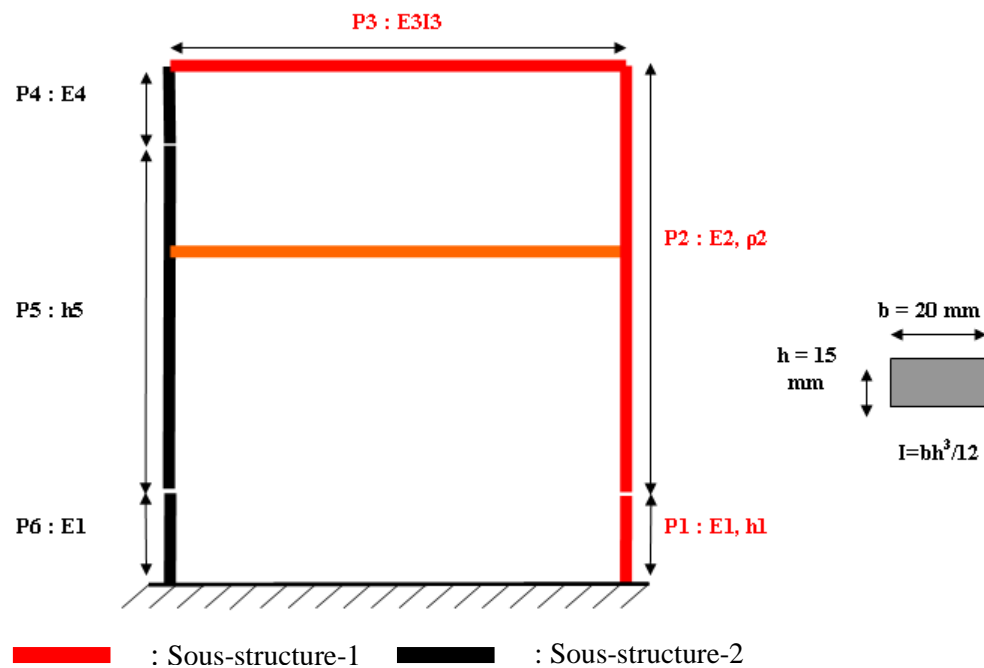


Fig IV. 17: Paramètres incertains choisis pour le cas académique du portique

Nous sélectionnons sur le modèle du portique 6 parties « P_i » ($i=1\dots6$) dont nous considérons les propriétés matérielles comme incertaines (Fig IV.17). 8 paramètres sont au final choisis et sont donc considérés comme des variables aléatoires. Des lois de probabilité normales leur sont associées. Les valeurs de dispersion de ces paramètres sont résumées Tab IV.2.

Paramètre	moyenne	écart type / moyenne
E1	$2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$	0.5
E2	$2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$	0.5
E3	$2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$	0.1
E4	$2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$	0.3
E3I3	$11800 \times 10^3 \text{ N.m}^2$	0.2
h1	$15 \times 10^{-3} \text{ m}$	0.35
ρ_2	7800 kg/m^3	0.1
h5	$15 \times 10^{-3} \text{ m}$	0.15

Tab IV. 2: Dispersions sur les paramètres incertains sélectionnés pour le cas académique du portique

- **Modèle choisi pour l'approche non-paramétrique.**

Concernant la modélisation non-paramétrique, les niveaux de dispersions introduits sont:

- $\delta_{Ks1} = 0.25, \delta_{Ms1} = 0.05,$
- $\delta_{Ks2} = 0.2.$

Les notations M et K sont relatives respectivement aux matrices masse et raideur. Les indices 1 et 2 sont relatifs respectivement aux sous-structures 1 et 2.

Notons que les niveaux d'incertitudes introduits pour les deux méthodes sont importants. En effet ; le but de ce travail est entre autres de juger de la robustesse des méthodes de réduction et de leur amélioration pour de tels niveaux.

IV.4.1.2. Propagation des incertitudes en sous-structuration et amélioration de la robustesse

Les deux approches de propagation des incertitudes sont appliquées successivement sur le modèle. Nous nous intéressons au cas où les perturbations sont appliquées dans un contexte de réanalyse approchée en sous-structuration de Craig-Bampton.

Dans un premier temps, nous effectuons les calculs de propagation des incertitudes, par une simulation de type Monte Carlo, en utilisant la base de Craig-Bampton (**CB**) issue du modèle nominal. Le nombre de modes de cette base, pour chaque sous-structure, correspond au nombre calculé dans la bande fréquentielle $[0 ; 3 \cdot F_{\max}]$, F_{\max} étant la fréquence maximale de la bande d'étude. Elle correspond dans ce cas à 500 Hz. Cette taille de base assure un taux de réduction de 60%.

Nous proposons ensuite de mettre en œuvre les méthodes:

- d'enrichissement par calcul des vecteurs de résidus statiques (**SRVE** pour *Static Residual Vector Enrichment method*)
- des approximations combinées généralisée à la sous-structuration (**GCA** pour *Generalized Combined Approximations method*) que nous avons proposée dans ce travail.

Le tableau Tab IV.3 résume le nombre de modes utilisés pour les 3 méthodes afin d'assurer le même taux de réduction.

	<i>Méthode CB</i>	<i>Méthode SRVE</i>	<i>Méthode GCA</i>
<i>Nombre de modes de la base nominale tronquée (Fmax = 500 Hz)</i>			
<i>Sous-structure 1</i>	45 [0 ; 3Fmax]	18 [0 ; Fmax]	18 [0 ; Fmax]
<i>Sous-structure 2</i>	25 [0 ; 3Fmax]	8 [0 ; Fmax]	8 [0 ; Fmax]
<i>Nombre de modes de la base enrichie après DVS</i>			
<i>Sous-structure 1</i>	45 (base nominale)	45	45
<i>Sous-structure 2</i>	25 (base nominale)	25	25
<i>Taux de réduction (%)</i>	60	60	60

Tab IV. 3: Nombre de modes des méthodes de réduction pour chaque cycle de réanalyse

Nous comparons donc au final, pour des taux de réduction égaux, les performances des méthodes :

- de Craig-Bampton utilisant la base nominale standard, non-enrichie, **CB**,
 - de la **SRVE** et de la **GCA** dont les bases sont actualisées à chaque itération en fonction des perturbations introduites. Le taux de réduction est le même pour les 3 méthodes et vaut 60%.
 - un calcul exact, est effectué à chaque cycle de modification. Il correspond au calcul de référence par rapport auquel les résultats des 3 méthodes précédentes sont comparés.
- 2 séries de N=3000 cycles de réanalyse sont effectuées. Les perturbations sont dues, lors des deux séries, respectivement aux approches paramétrique et non-paramétrique de modélisation des incertitudes. A chaque cycle de réanalyse, les matrices de masse et de raideur modifiées sont calculées sur le modèle global de chaque sous-structure. Les réductions de modèles sont ensuite réalisées par les 3 méthodes CB, SRVE et GCA.

Notons que pour chacun des N=3000 cycles de perturbations, les 3 méthodes de réduction sont successivement appliquées. Ceci nous assure donc que les mêmes perturbations introduites sur le modèle sont étudiées selon les 3 méthodes de réduction.

Les résultats obtenus avec chaque méthode sont traités selon les critères suivants :

a- le critère fréquentiel consistant au calcul des erreurs relatives entre les 30 premières fréquences propres du modèle perturbé réduit et celles du calcul exact,

b- le critère vectoriel consistant au calcul des corrélations MAC entre les 30 vecteurs propres du modèle perturbé réduit et ceux du calcul exact.

IV.4.1.3. Critère de troncature a posteriori de la méthode GCA

Lors de la mise en œuvre de la méthode des approximations combinées, la question qui se pose naturellement concerne le choix du rang de développement en série binomiale des vecteurs de la base de réduction de la structure modifiée r :

$$y = (I + B)^{-1} y_1 + (I + B)^{-1} K_0^{-1} f_j \quad (IV.123)$$

avec :

$$y^I = \lambda^0 K_0^{-1} (M_0 + \Delta M) y^0 \quad \text{et} \quad B = K_0^{-1} \Delta K \quad (\text{IV.124})$$

De telle sorte que le vecteur r puisse s'écrire en fonction d'un nombre n de vecteurs :

$[r^1, r^2 \dots r^n]$ dépendant tous du vecteur propre r^0 de la structure nominale et des perturbations ΔK et ΔM .

Dans [7] on peut trouver une méthode de convergence en énergie résiduelle permettant de sélectionner un nombre suffisant de vecteurs d'une base robuste. Cette technique a initialement été proposée pour le calcul du nombre de vecteurs nécessaire dans une méthode d'enrichissement de type SRVE. Nous l'étendons au cas de la méthode des approximations combinées. L'idée est de trouver un nombre suffisant de vecteurs, issus d'un rang de développement n que l'on fait varier, afin d'obtenir une base de réduction robuste par la méthode GCA.

Nous considérons que la solution approchée calculée par la méthode GCA est notée : $y = T_{GCA,n} c$ où $T_{GCA,n}$ et c sont respectivement la matrice de transformation de la méthode GCA, dépendant du rang de développement n de la série binomiale, et le vecteur des coordonnées généralisées. Après l'opération de décomposition en valeurs singulières, la matrice $T_{GCA,n}$ est tronquée de telle sorte qu'elle contient autant de vecteurs propres que la base de réduction de CB nominale.

Le résidu des forces dans chaque sous-structure (force d'erreur) est donné, pour chaque pulsation ω par :

$$\Delta F(\omega) = (K - \omega^2 M) y - F \quad (\text{IV.125})$$

F étant le vecteur des forces extérieures.

On peut calculer une réponse résiduelle statique associée au résidu des forces par :

$$R = K^{-1} \Delta F \quad (\text{IV.126})$$

Un critère de convergence, dépendant de la réponse approchée y et donc du rang de développement de la série binomiale n , est construit en fonction des énergies résiduelles tel que :

$$\varepsilon(\omega) = \frac{R^T K R}{y^T K y} \quad (\text{IV.127})$$

Le calcul de ce critère de convergence en énergies résiduelles permet donc de quantifier la précision de la base de réduction $T_{GCA,n}$ en fonction de n .

Nous illustrons l'utilisation de ce critère de convergence sur le cas académique du portique pour une perturbation non-paramétrique donnée choisie aléatoirement avec la configuration :

$$\delta_{Ks1} = 0.25, \delta_{Ms1} = 0.05, \delta_{Ks2} = 0.2.$$

La figure Fig IV.18 illustre le tracé de ce critère de convergence pour la plage fréquentielle d'analyse. Le critère a été tracé pour 2 bases $T_{GCA,n}$ correspondant respectivement au rang de développement en série binomiale $n = 2$ et 3 pour chacune des deux sous-structures. Le tracé illustre clairement que la réponse approchée calculée avec la base de CB nominale n'est pas assez précise comparée à celle

calculée par les bases améliorées $T_{GCA,2}$ et $T_{GCA,3}$. Cette précision continue de diminuer, ce qui se traduit par un accroissement de la valeur du critère de convergence, en fonction de la fréquence. Ceci traduit la limite de prédiction de la base de prédiction de la base CB nominale.

De leur côté, les bases améliorées garantissent une précision stable sur toute la largeur de la bande fréquentielle étudiée et ce pour le même taux de réduction. Nous notons une légère amélioration pour le cas $n = 3$ mais celle-ci n'est pas significative. Nous pouvons conclure que globalement, une base améliorée $T_{GCA,n}$ obtenue avec un rang $n = 2$ ou 3 , est suffisante dans ce cas pour garantir une bonne prédiction du calcul.

Pour la mise en œuvre de la méthode GCA, nous intégrons le calcul de ce critère dans l'étude de propagation des incertitudes par réanalyse approchée. Nous fixons le seuil maximum du critère à une valeur de 1% au dessus de laquelle la convergence n'est pas atteinte et auquel cas le rang du développement en série binomiale de la méthode GCA doit être augmenté d'une unité. Les rangs de développement en série binomiale de la méthode GCA varient entre 2 et 3.

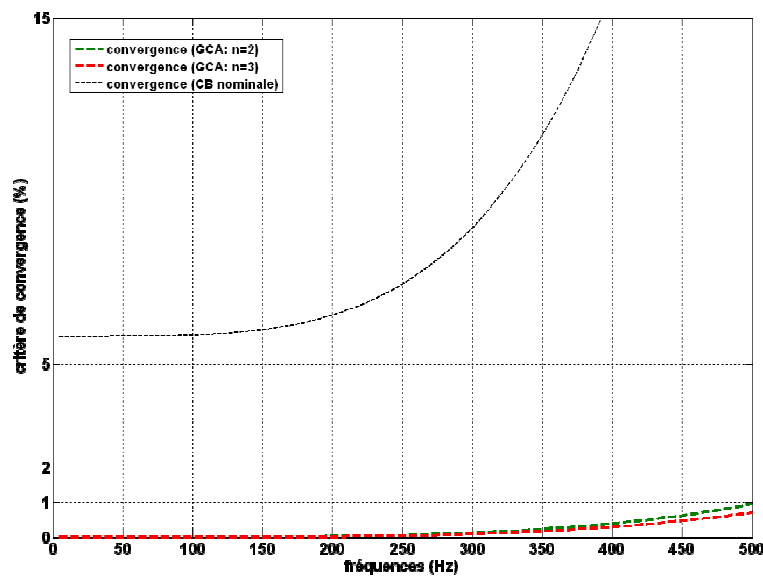


Fig IV. 18: Critère de convergence en énergie résiduelle

IV.4.1.4. Bilan des performances des méthodes de réduction

Les résultats des calculs sont exprimés en termes de valeurs inférieures et supérieures de l'intervalle de confiance à 96% des données obtenues.

- Cas de l'approche paramétrique

Concernant les résultats relatifs à l'approche paramétrique, on peut observer Fig IV.19 et Fig IV.20, que les deux méthodes d'amélioration, SRVE et GCA, ont globalement de meilleures performances de robustesse par rapport aux prédictions de la méthode non-actualisée de CB. Elles assurent des écarts fréquentiels relatifs de $[-5, +9]$ % au lieu de $[-30, 16]$ % correspondant aux prédictions de la méthode de CB non actualisée.

Le critère vectoriel confirme cette tendance. En effet ; les valeurs inférieures des MAC, correspondant aux cas les plus défavorables, par rapport au calcul exact, assurées par les méthodes enrichies sont supérieures à 90%. Certaines valeurs issues de la méthode de CB nominale peuvent descendre à 62%, notamment pour le mode 14.

Nous pouvons remarquer également que les qualités de prédiction des méthodes SRVE et GCA sont globalement comparables pour des perturbations de type paramétrique. Un léger avantage pour la méthode GCA peut être observé notamment pour le critère vectoriel. Les valeurs des MAC peuvent descendre à 90% en valeurs inférieures à partir du mode 26. La méthode GCA assure une prédiction globalement supérieure à 93% pour tous les modes.

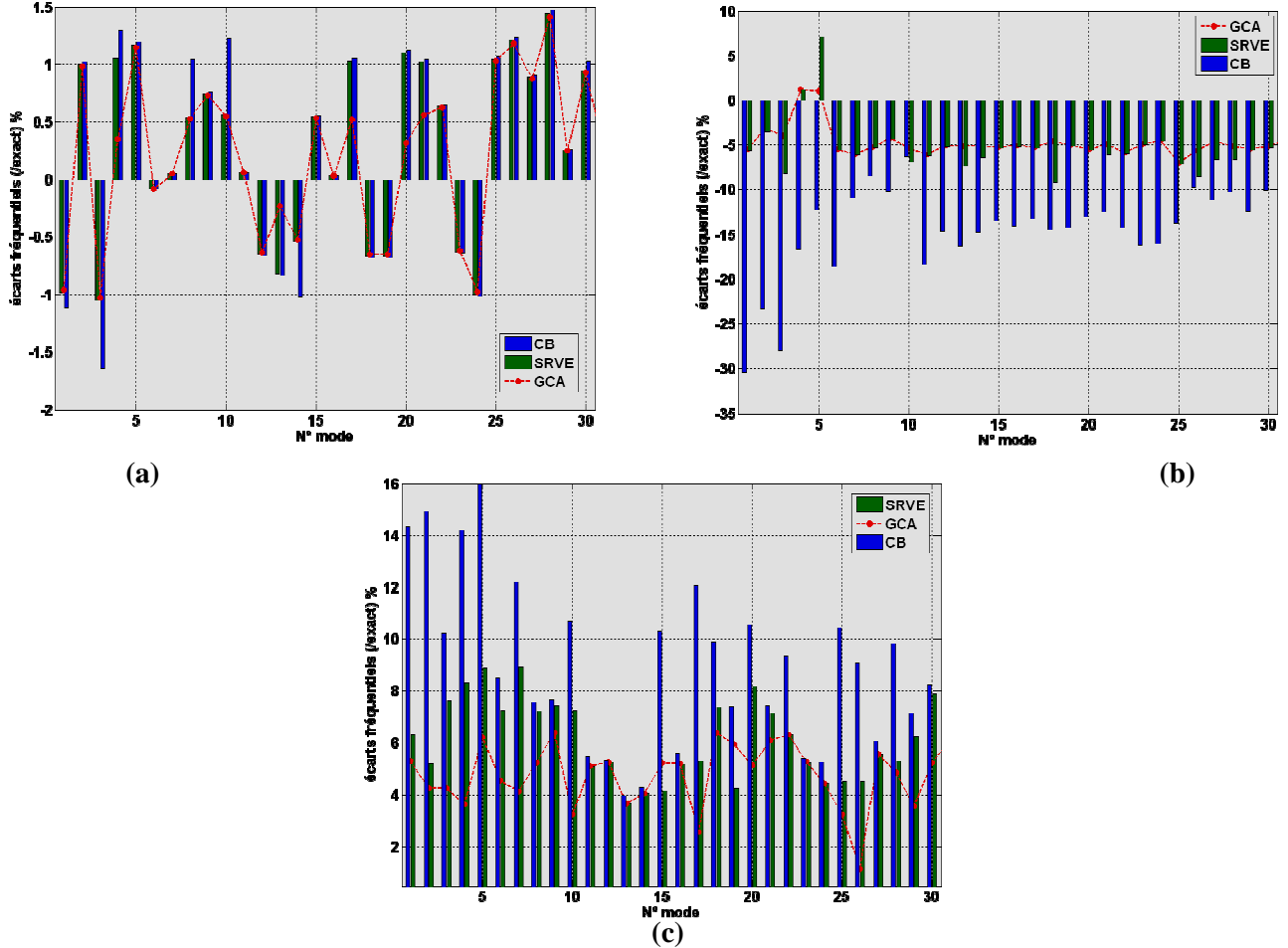


Fig IV. 19: Qualité de prédiction des méthodes de réduction : critère fréquentiel- Modèle académique (approche paramétrique) (a) : moyennes – (b) : valeurs inférieures (c) : valeurs supérieures (confiance à 96%)

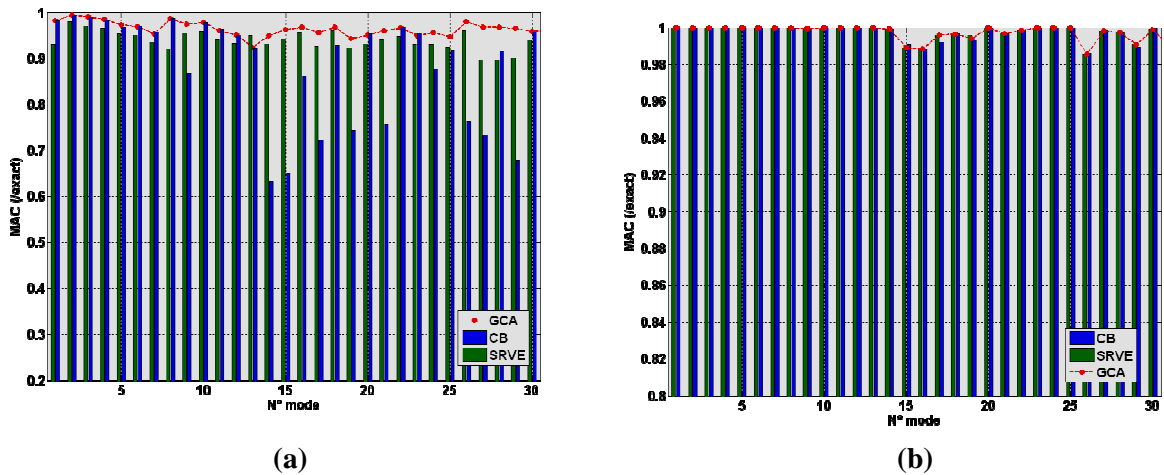
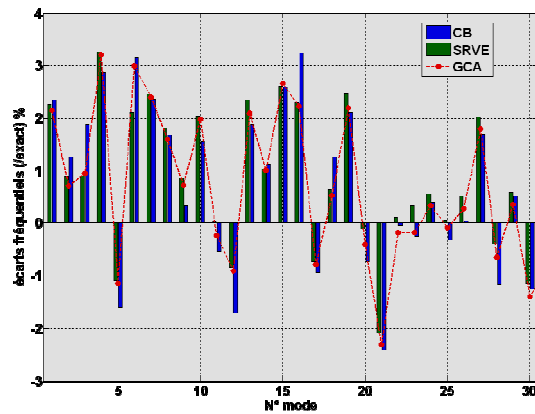
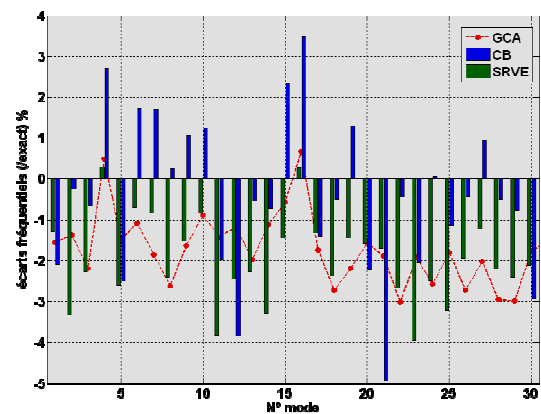


Fig IV. 20: Qualité de prédiction des méthodes de réduction : critère vectoriel- Modèle académique – (approche paramétrique) (a) : valeurs inférieures– (b) : valeurs supérieures (confiance à 96%)

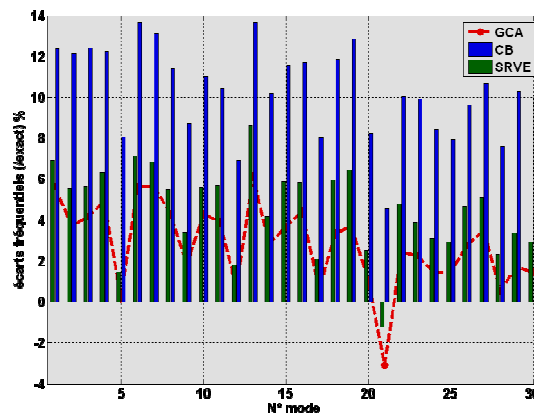
- Cas de l'approche non-paramétrique



(a)



(b)



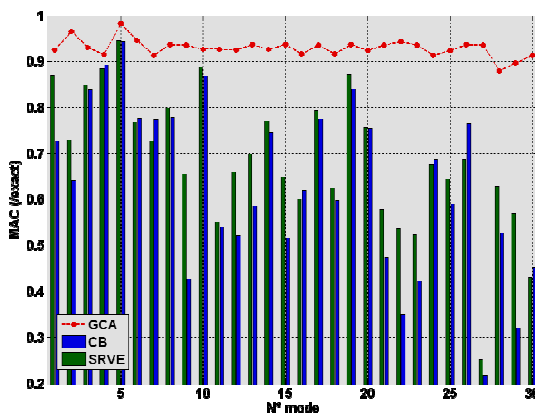
(c)

Fig IV. 21: Qualité de prédiction des méthodes de réduction : critère fréquentiel

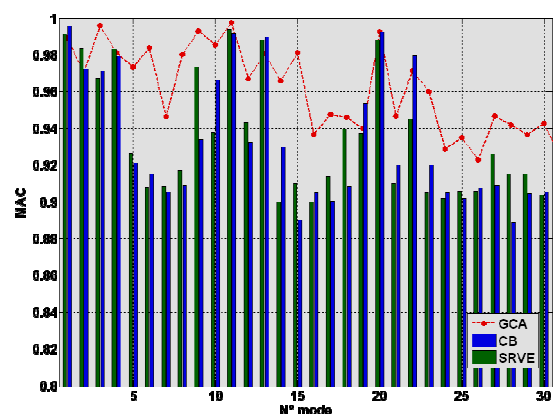
Modèle académique – approche non- paramétrique

(a) : moyennes – (b) : valeurs inférieures (confiance à 96%)

(c) : valeurs supérieures (confiance à 96%)



(a)



(b)

Fig IV. 22: Qualité de prédiction des méthodes de réduction : critère vectoriel

Modèle académique – approche non- paramétrique

(a) : valeurs inférieures– (b) : valeurs supérieures (confiance à 96%)

Nous retrouvons, pour les résultats des perturbations de type non-paramétrique (Fig IV.21 et Fig IV.22), les mêmes observations concernant la faible prédiction de la méthode de CB standard non actualisée. Les écarts fréquentiels enregistrés par rapport au calcul exact peuvent atteindre $[-5 ; 13] \%$. C'est sur le critère vectoriel où ces observations sont les plus prononcées. Les MAC peuvent chuter en effet à 25% par rapport au calcul exact.

La différence remarquable par rapport au cas paramétrique réside dans la divergence entre les performances des méthodes d'enrichissement SRVE et GCA.

La méthode GCA assure une bonne prédictivité pour ce type de perturbations non-paramétriques alors que la méthode d'enrichissement SRVE n'est plus adaptée. Ceci est nettement visible sur le critère vectoriel (Fig IV.22) où la méthode SRVE n'est pas plus efficace que la base de CB nominale.

L'efficacité de la méthode GCA se justifie quant à elle par son processus d'amélioration plus adaptée qui se base sur le développement en série binomiale de chaque mode propre relatif à la base nominale.

Outre les performances de prédiction discutées plus haut, nous pouvons quantifier les gains en temps de calcul relatifs aux méthodes de réduction par rapport à un calcul exact (Fig IV.23). Pour chaque cycle de réanalyse, les gains en temps CPU des méthodes SRVE et GCA sont respectivement de 75% et 73% par rapport à un calcul exact. Ce gain en temps est bien entendu à comparer au ratio de réduction qui est dans notre exemple égal à 60%.

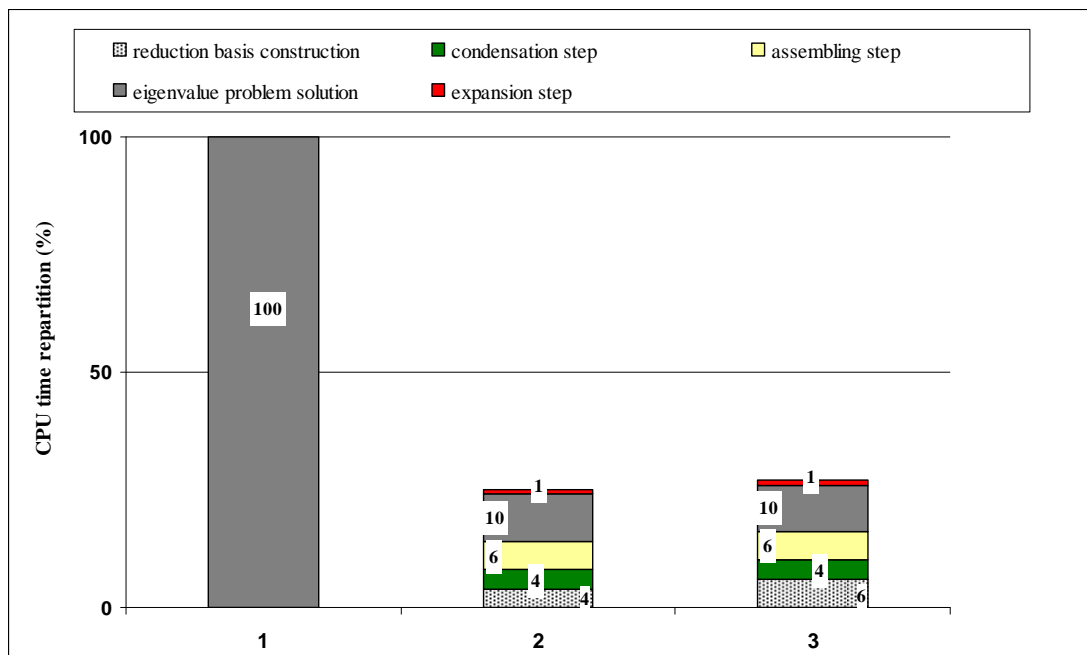


Fig IV. 23: Gain en temps de calcul CPU des méthodes de réduction
1- calcul exact, 2-méthode SRVE, 3-méthode GCA

En raison de la très bonne qualité de prédiction, en réanalyse approchée, de la méthode GCA, comparée à la méthode d'enrichissement SRVE, en particulier lors de la modélisation d'incertitudes non-paramétriques, nous l'avons retenue afin de l'appliquer au cas industriel d'un stator de machine ferroviaire. Dans ce dernier, une approche hybride de propagation des incertitudes, combinant les méthodes paramétrique et non-paramétrique en fonction des propriétés des zones du modèle, est mise en œuvre. La méthode GCA est en effet la meilleure approche étudiée présentant de très bonnes performances de prédiction dans les cas paramétrique et non-paramétrique.

IV.4.2. Application industrielle : stator d'architecture 1

Dans ce paragraphe, nous mettons en œuvre une approche hybride combinant les méthodes paramétrique et non-paramétrique pour propager les incertitudes sur le MEF du stator ferroviaire. Le calcul est réalisé en réanalyse approchée dans un contexte de sous-structuration. La méthode GCA est retenue pour assurer cette approche. Ses performances sont comparées à la méthode utilisant la base de CB du modèle nominal.

IV.4.2.1. Description du modèle

Nous nous intéressons dans cette simulation au cas du stator d'architecture 1 dont la géométrie est assez générique par rapport à une large gamme de stators ferroviaires conçus et fabriqués par ALSTOM Transport (Ornans, 25).

Comme nous l'avons vu au chapitre III, l'étude du stator d'architecture de type 1 a permis d'établir des règles générales de modélisation qui permettent de prédire le comportement dynamique d'un stator de design générique avec une précision raisonnable (écarts fréquentiels relatifs compris dans $[-4\% ; 4\%]$ et MAC moyen supérieur à 85% dans la bande fréquentielle $[0 ; 1000]$ Hz.

Une autre erreur épistémique est donc présente à cause des limites de la représentativité du modèle et de son paramétrage, dont la limite de prédictivité est estimée à hauteur de 85% de MAC au maximum et non à une valeur supérieure.

En considérant ce modèle validé comme base de travail, nous propageons des incertitudes selon différentes méthodes en fonction des particularités de chacune de ses zones:

- Les hypothèses de modélisation les plus fortes reconnues sont situées au niveau des zones de l'empilement de tôles, des têtes de bobines et des cercles de phases. Nous rappelons en effet que ces zones sont modélisées par des volumes équivalents orthotropes (Fig IV.24). Cette simplification est prédictive jusqu'à une certaine mesure, mais introduit de fait une erreur de modélisation que nous ne pouvons négliger. A ces zones, nous attribuons donc un fort niveau d'incertitude que nous propageons par la méthode non-paramétrique.
- Les différentes zones de la carcasse (entretoises, plateaux de serrage) ne posent *a priori* pas de problème de modélisation. Il s'agit en effet de pièces métalliques isotropes de comportement maîtrisé et dont la géométrie est suffisante pour propager les incertitudes sur ces zones.

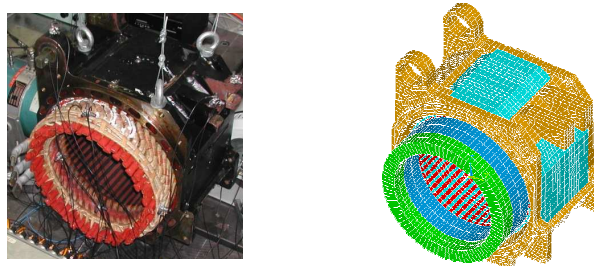


Fig IV. 24: Stator d'architecture 1 : MEF établi et réalité géométrique

Afin d'opérer dans un contexte de sous-structuration, nous avons choisi, pour des raisons pratiques de découper le MEF en 4 sous-structures telles que décrites Fig IV.25. et Fig IV.26.

Ce découpage permet en effet de simplifier la manipulation des surfaces de jonction entre les sous-structures qui se trouve être des surfaces planes. Il permet également de réduire le nombre de ddl de

jonction. Un autre découpage isolant l'empilement de tôles par exemple aurait introduit beaucoup plus de ddls de jonction en raison de la complexité des surfaces de jonction générées.

Le modèle nominal global contient 115000 ddls environ réparti en 4 sous-structures avec environ 30 000 ddls dans chacune d'entre elles.

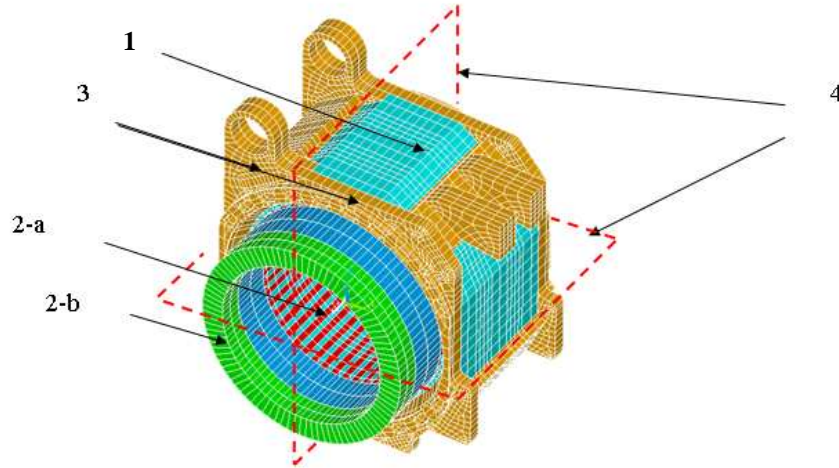


Fig IV. 25: Découpage du MEF du stator en 4 sous-structures selon les 2 plans « 4 » :1- Empilement de tôles ; 2-a : Partie insérée du bobinage ; 3-b : Têtes de bobines et des cercles de phases

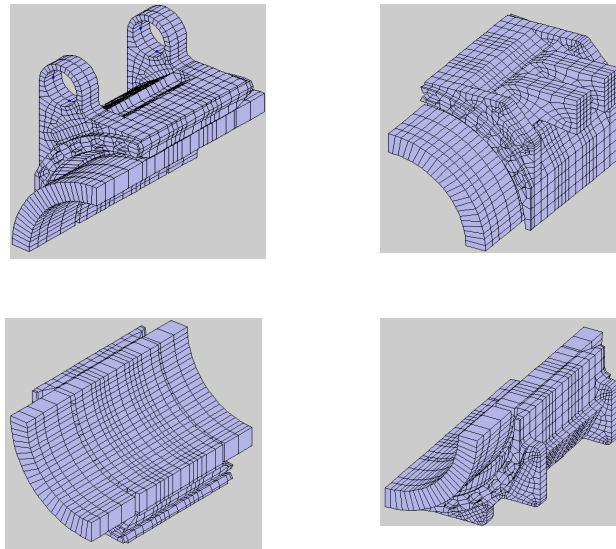


Fig IV. 26: 4 Sous-structures obtenues après découpage

Nous introduisons une approche hybride prenant en compte des incertitudes aléatoires et épistémiques en fonction des caractéristiques de chaque zone du modèle :

$$[-\omega^2(M_0 + \Delta M) + (K_0 + \Delta K)]y = 0 \quad (\text{IV.127})$$

Où $(\Delta K, \Delta M)$ sont des perturbations issues, selon les propriétés de région du modèle, des approches paramétrique ou non-paramétrique de modélisation des incertitudes.

Concernant l'approche paramétrique, les 3 modules de Young relatifs à la carcasse (entretoises, plateaux de serrage et soudures) sont sélectionnés. Ils sont considérés comme des variables aléatoires de lois normales et de dispersion de 5% par rapport à leur valeur nominale.

Concernant l'approche non-paramétrique, les niveaux de dispersion suivants sont appliqués (Fig IV.25) :

- $\delta_{Ks1} = 0.25$: sur la raideur de la zone (2-b),
- $\delta_{Ms1} = 0.15$: sur la masse de la zone (2-b).
- $\delta_{Ks2} = 0.20$: sur la raideur de l'empilement feuilleté (1) et la partie insérée du bobinage (2-a).

Nous avons fixé le rang de développement de la série binomiale de la méthode GCA à $n = 5$ pour l'enrichissement des bases de Craig-Bampton de chaque sous-structure.

IV.4.2.1.1. Propagation des incertitudes par approche hybride et bilan des performances de la réduction

Par analogie avec le cas de l'exemple académique, les mêmes critères de comparaison des résultats sont utilisés. Nous nous intéressons aux 5 premiers modes propres calculés dans la bande $[0, 1000]$ Hz. 500 cycles de réanalyse approchée sont réalisés.

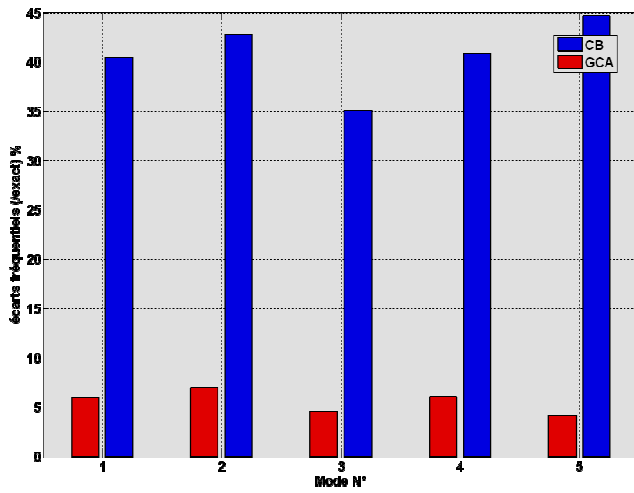
$n_i = 30$ modes propres sont calculés pour chaque sous-structure nominale dans la bande $[0, 3F_{\max}]$, $F_{\max} = 1000$ Hz. Le ratio de réduction est de l'ordre de 90%.

Avec des niveaux importants de dispersion introduits, notamment pour l'approche non-paramétrique, les performances de robustesse de la méthode GCA sont nettement plus élevées que ceux d'une méthode de CB non actualisée. Les erreurs relatives en fréquences (Fig IV.27) sont maintenues dans $[-1, +6]\%$ alors que la base de CB nominale n'assure pas mieux que des erreurs comprises dans $[-9, +45]\%$ par rapport au calcul exact.

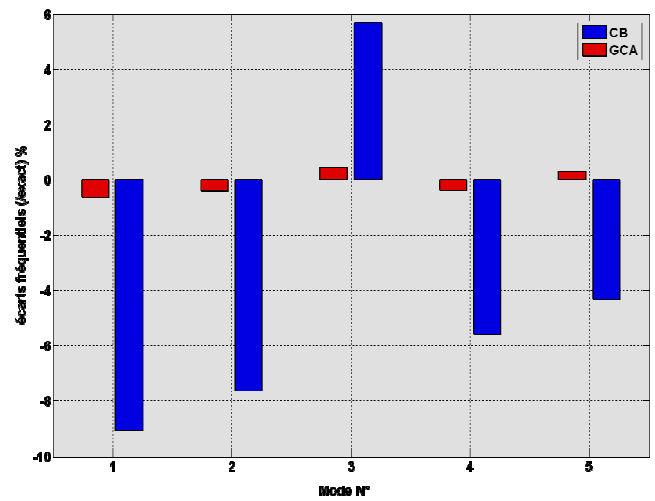
Concernant le critère vectoriel, (Fig IV.28), les valeurs inférieures des corrélations avec le calcul exact, qui correspondent donc aux cas les plus sévères, sont maintenues à des valeurs supérieures à 0.9 pour la méthode GCA comparées à 0.40 pour la méthode de CB non-enrichie.

En plus de ses bonnes performances de robustesse, la méthode GCA permet 60% de gain en temps de calcul CPU pour un taux de réduction de 90% (Fig IV.29).

Finalement, la méthode GCA confirme son adaptation de prédiction avec des écarts fréquentiels de l'ordre de $[-1 ; 6]\%$ et des MAC supérieurs à 0.9 en réanalyse approchée par rapport au calcul perturbé exact. Cette méthode assure donc une bonne adaptation à une méthode de propagation des incertitudes par une approche hybride combinant les méthodes paramétrique et non-paramétrique dans un contexte de sous-structuration industrielle.



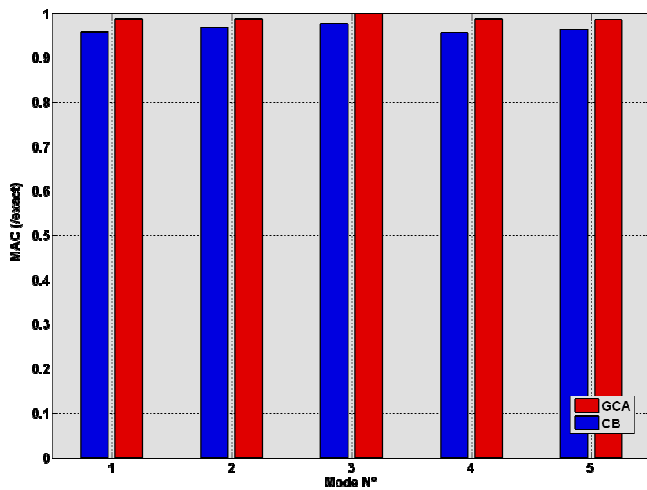
(a)



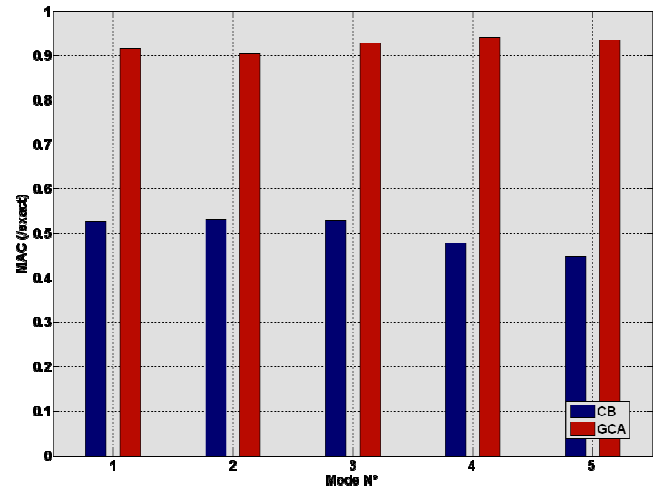
(b)

Fig IV. 27: Qualité de prédiction des méthodes de réduction : critère fréquentiel
Modèle industriel– approche hybride

(a) : valeurs supérieures– (b) : valeurs inférieures (confiance à 96%)



(a)



(b)

Fig IV. 28: Qualité de prédiction des méthodes de réduction : critère vectoriel
Modèle industriel– approche hybride

(a) : valeurs supérieures– (b) : valeurs inférieures (confiance à 96%)

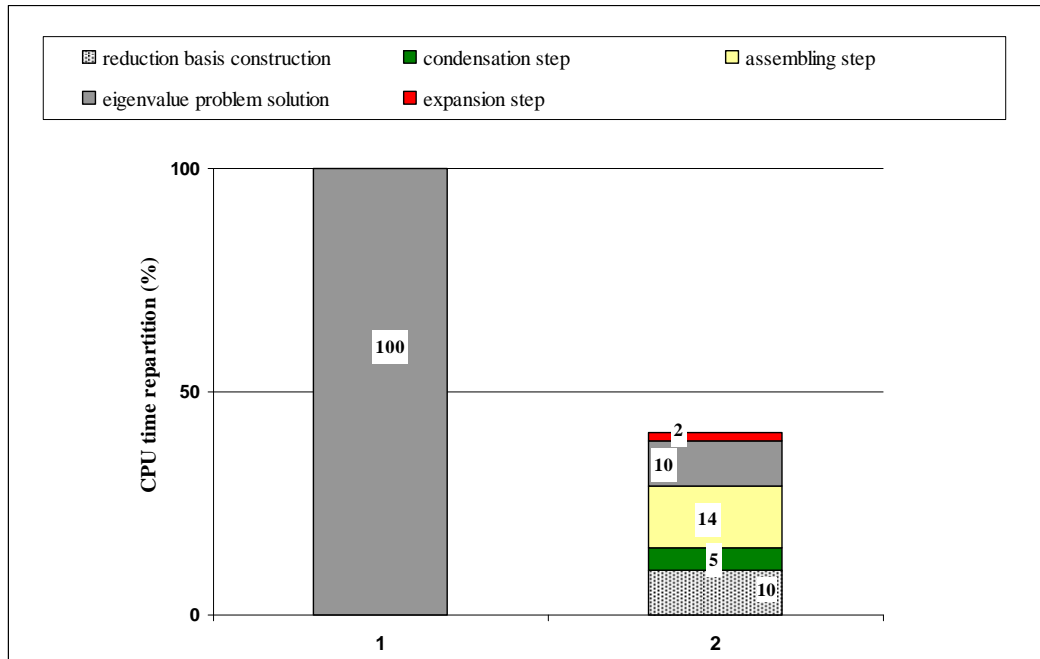


Fig IV. 29: Gain en temps de calcul CPU des méthodes de réduction
1- calcul exact, 2- méthode GCA

IV.4.2.2. Effets des incertitudes sur le MEF du stator ferroviaire

Dans ce paragraphe nous exposons les résultats de la dispersion des fréquences propres et des MAC du modèle nominal par rapport aux résultats expérimentaux.

Les figures Fig IV.30 et Fig IV.31 illustrent cette dispersion par rapport aux valeurs du modèle nominal établi et sont exprimées en fonction des valeurs inférieures et supérieures de l'intervalle de confiance à 96% des données obtenues. Les niveaux d'incertitudes introduits peuvent générer les écarts résumés dans le tableau Tab IV.4 suivant :

N° mode	fréquences nominales	écarts fréquentiels (./ mesure) %	MAC nominaux (./ mesure) %	effets incertitudes sur modèle nominal	
				fréquences (%)	MAC (%)
#1	446.8	-3.9	85	[-22 ; 4]	[79 ; 93]
#2	572.6	1.3	91	[-14 ; 12]	[81 ; 94]
#3	676.6	-1.9	87	[-9 ; 9]	[80 ; 89]
#4	785.1	-4.3	95	[-10 ; 16]	[86 ; 97]
#5	911.1	2.2	87	[-9 ; 10.5]	[77 ; 90]

Tab IV. 4: Dispersions des fréquences et modes propres dues aux incertitudes

Nous pouvons également confirmer cette dispersion en observant la dispersion des FRF sur deux points d'observation (Fig IV.32, Fig IV.33). Ces figures illustrent clairement que les fréquences propres des modèles perturbés, prises dans leur ensemble, couvrent une bande fréquentielle de manière « assez continue ». Dans ce cas de figure, une estimation de la première fréquence propre, en tenant compte d'éventuelles incertitudes, doit être la première information principale à retenir.

Nous pouvons conclure qu'à ce stade de l'étude, la propagation des incertitudes, selon les niveaux introduits sur le modèle validé, est au moins prédictive des écarts qui ont pu être causés par les dispersions de fabrication et les prédictions de la modélisation. (MAC supérieurs à 85% et écarts fréquentiels compris dans $[-4 ; +4]$ %).

Ces données représentent une information importante pour le concepteur du stator ferroviaire. Elles permettent de prendre en compte, à partir des valeurs inférieures des fréquences et des MAC, correspondant souvent aux cas de conception les plus sévères, ou les moins improbables, les variations du comportement dynamique du système. Un calcul prenant en compte des niveaux de dispersion plus sévères peut être envisagé selon la même démarche suivie dans ce travail et utilisant la méthode GCA pour un gain en temps de réalisation. Ce choix du niveau d'incertitudes à introduire *a priori* reste au final du ressort du concepteur. Cela dit, notons que ce calcul ayant été réalisé avec des niveaux de dispersion, paramétrique largement surestimés et des niveaux non-paramétriques assez forts, il peut être considéré comme une indication assez significative.

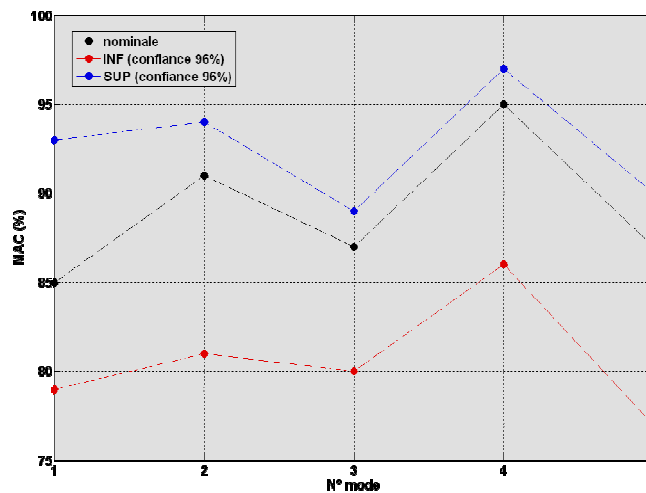


Fig IV. 30: Effets des incertitudes sur l'évolution des MAC par rapport à la valeur nominale

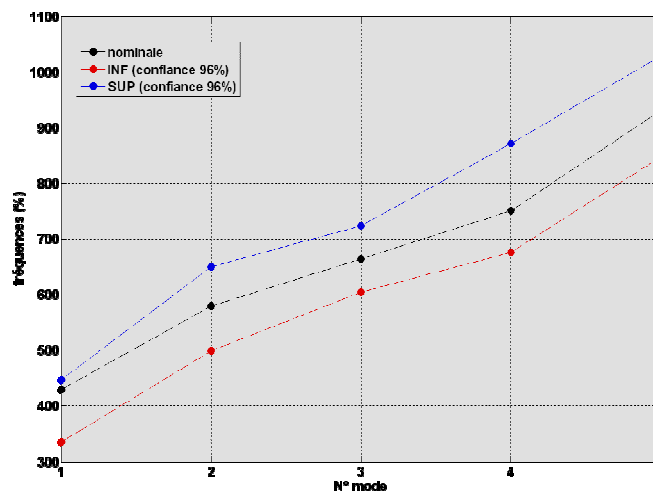


Fig IV. 31: Effets des incertitudes sur l'évolution des fréquences propres par rapport à la valeur nominale

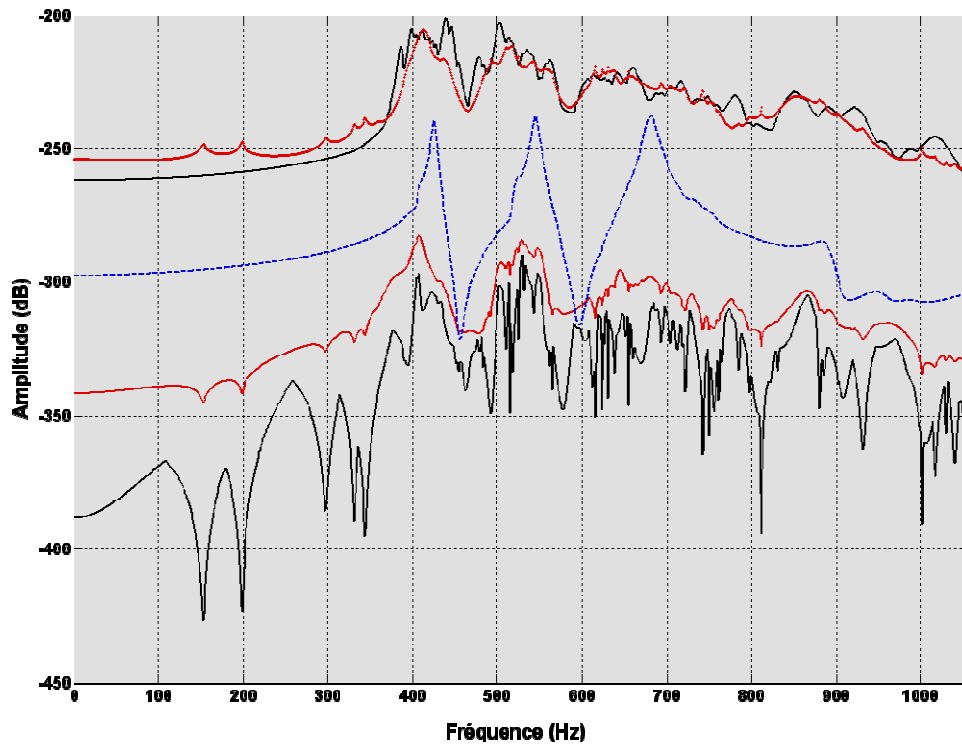


Fig IV. 32: Dispersion des fonctions de réponses fréquentielles : modèle industriel, propagation des incertitudes par approche hybride (ddl d'observation 1 sur carcasse)
(moyenne (bleu), min-max (noir), inf-sup (confiance à 96%) (rouge))

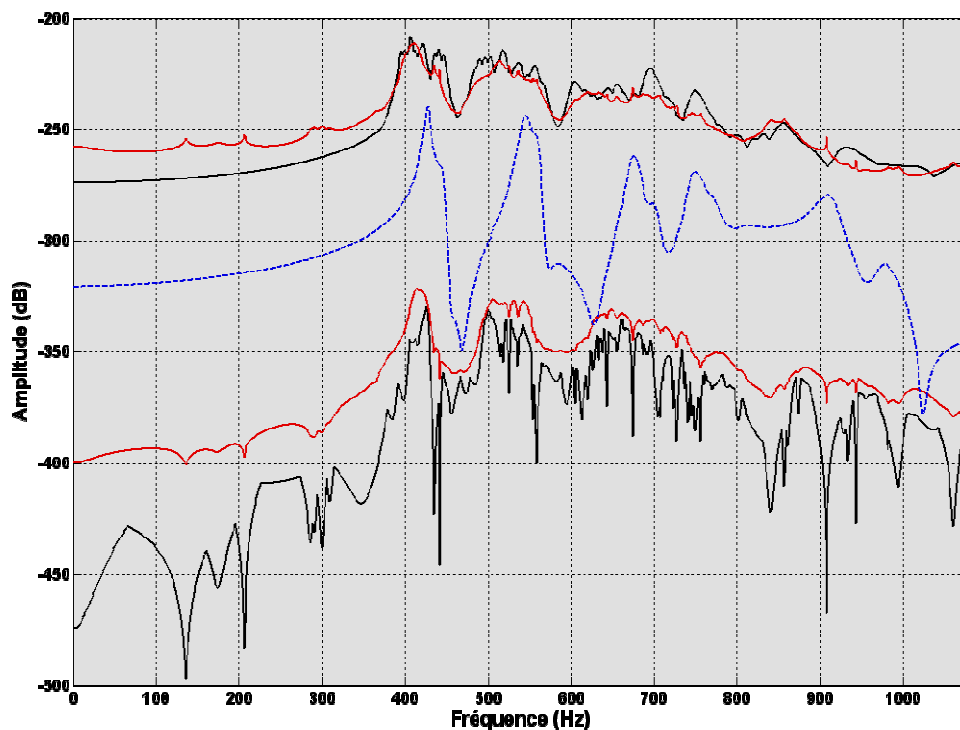


Fig IV. 33 : Dispersion des fonctions de réponses fréquentielles : modèle industriel, propagation des incertitudes par approche hybride (ddl d'observation 2 sur empilement tôles)
(moyenne (bleu), min-max (noir), inf-sup (confiance à 96%) (rouge))

Chapitre V

Conclusion générale

Lors de ce travail, l'objectif a été de proposer une modélisation générique et prédictive du comportement dynamique en basses fréquences d'assemblages complexes tels que les stators de machines de traction ferroviaires. Une modélisation déterministe n'étant pas suffisante dans un tel contexte, une analyse de robustesse traitant de différents types d'incertitudes a été menée. Celle-ci a été réalisée dans un contexte de sous-structuration faisant appel à la réanalyse approchée robuste.

Nous avons montré lors du second chapitre que la complexité des stators ferroviaires, leur propriétés mécaniques hétérogènes, essentiellement localisées dans leur cœur feuilleté et dans leurs bobinages, étaient des difficultés avérées. Nombre d'études dans la littérature ont traité du problème de la modélisation de ces stators sans pour autant en proposer des règles prédictives et surtout génériques. Nous avons donc étudié, pas à pas les principaux points durs de cette problématique et nous avons fini par proposer une modélisation, basée sur des règles génériques pouvant être transposées à différentes architectures de stators.

Une modélisation générique basée sur la théorie de l'homogénéisation de l'empilement feuilleté a été proposée. Une modélisation des bobinages des stators en plusieurs blocs homogènes a été développée. Ces règles, données avec d'autres recommandations, ont permis de prédire le comportement moyen à basses fréquences de deux stators d'architectures totalement différentes.

Conscients qu'une modélisation déterministe n'est pas satisfaisante pour la modélisation d'un assemblage industriel complexe, nous avons placé le deuxième objectif de ce travail, développé dans le dernier chapitre, dans un contexte d'études des incertitudes. En effet, un bilan aussi exhaustif que possible a permis d'établir que la variabilité des propriétés des stators, leur procédé d'assemblage et sur un autre plan leurs hypothèses de modélisation, étaient des sources d'incertitudes.

Le travail apporté a été de coupler deux méthodes stochastiques, notamment la méthode paramétrique et la méthode non-paramétrique, adaptées respectivement à la propagation des incertitudes irréductibles et épistémiques, en une seule approche hybride.

Nous avons souligné toutefois la difficulté de quantifier avec exactitude les niveaux de dispersion qu'il faudrait a priori introduire pour représenter tel ou tel phénomène incertain, notamment lors de l'utilisation de la méthode non-paramétrique. Nous avons discuté d'une solution basée sur l'établissement d'un lien entre les niveaux de dispersion des méthodes paramétrique et non-paramétrique. Nous avons montré qu'une telle approche était coûteuse en terme de temps CPU.

En raison de la taille des MEF manipulés, et de la nature assemblée de la structure étudiée, ce travail a été mené dans un contexte de sous-structuration. La propagation des incertitudes a été faite par voie de réanalyse approchée à partir de modèles exacts.

Nous avons d'abord discuté les limites de validité d'une approche de propagation des incertitudes avec réduction de modèles. Nous avons démontré qu'une propagation des incertitudes ne pouvait se faire sur un modèle réduit nominal que dans la limite des faibles dispersions.

Lors de l'étude des incertitudes, nous avons montré qu'une réanalyse exacte, qui constitue la référence du problème, pouvait être coûteuse en temps de calcul et qu'une réanalyse approchée utilisant une seule base de réduction non-actualisée n'était pas satisfaisante, notamment pour des niveaux de

dispersion élevés. C'est pourquoi nous avons utilisé deux méthodes d'amélioration de la robustesse des bases de réduction ; à savoir la méthode SRVE et la méthode des approximations combinées que nous avons généralisée et étendu à la sous-structuration (méthode GCA).

Nous avons d'abord jugé des performances de robustesse de ces deux méthodes par rapport à la propagation paramétrique et non-paramétrique des incertitudes sur un cas académique.

Les résultats ont montré l'adaptation de la méthode GCA, plus robuste que la méthode SRVE, à la propagation des incertitudes par les deux approches, notamment grâce à son principe de développement en série binomiale des vecteurs propres modifiées. Ceux-ci sont exprimés en fonction des modes propres du système nominal non modifiée et des modifications introduites. Le choix du rang du développement est un paramètre supplémentaire qui peut être optimisé afin d'améliorer la précision de la méthode.

Toutefois, nous soulignons que le « réglage de ce paramètre » de la méthode GCA peut être amélioré, notamment en proposant un outil simple d'optimisation du rang de développement en série binomiale en fonction du niveau de perturbation introduit.

Nous avons retenu qu'au final, la méthode GCA était plus robuste lors de son utilisation en réanalyse approchée pour la propagation des incertitudes par voie paramétrique ou non-paramétrique.

Nous avons appliquée une démarche hybride de propagation des incertitudes sur le modèle industriel d'un stator ferroviaire que nous avons conçu et validé lors du chapitre III. La méthode GCA a confirmé sa robustesse dans un tel contexte de propagation des incertitudes en sous-structuration.

Enfin, nous remarquons qu'un travail de capitalisation de savoir, sous forme d'une note de recommandations, synthétisant les « best practices » de ce travail et a été rédigée et transféré au bureau d'études d'ALSTOM Transport.

Nous citons quelques éléments de perspectives qui nous semblent intéressantes à investiguer :

- Concernant la modélisation du stator ferroviaire :
 - Il serait d'abord intéressant de se focaliser sur le comportement des têtes de bobines en augmentant le niveau de détail de leur MEF homogénéisé. Outre l'intérêt d'augmenter la connaissance sur le comportement du modèle complet du stator, des phénomènes locaux, déterminants sur la durée de vie fonctionnelle du moteur, sont le siège de cette zone. Des phénomènes de non-linéarités de contact et de grands déplacements y ont été détectés. Quelques travaux ont été initiés dans la littérature, notamment pour des stators de grandes turbines.
 - Il serait également intéressant de se pencher sur le comportement dynamique du cœur feuilleté du stator en étudiant son amortissement. Il a déjà été montré à ce titre dans la littérature, ou même lors d'essais connexes à ce travail, qu'un feuilleté réduisait considérablement les amplitudes de certains modes propres, notamment ceux faisant intervenir le mouvement perpendiculaire aux feuilles. Un modèle à un niveau de détail plus fin peut être envisagé. La technique non destructive de propagation des ondes ultrasonores, que nous avons eu l'occasion d'illustrer dans ce travail, peut être investiguée plus en détail. Lors de la mise en œuvre de cette dernière sur une maquette feuilletée, l'atténuation de l'amplitude du signal a pu être observée. Rechercher une correspondance avec les des niveaux de réponses vibratoires peut être une piste intéressante de recherche.
 - Il serait également intéressant d'étendre la modélisation à la bande des moyennes fréquences afin d'étudier les phénomènes vibro-acoustiques liés à l'empilement feuilleté. Nous soulignons d'ailleurs que la quasi-totalité des études de modélisation

des stators ferroviaires menées dans la littérature concernant un champ d'application acoustique.

- Concernant l'étude des incertitudes :
 - Pour faciliter l'utilisation de la méthode non-paramétrique, adaptée à la modélisation des incertitudes de modélisation, il serait intéressant d'établir des tables de correspondance entre des niveaux d'incertitudes liés à certains phénomènes mal maîtrisés (fixations rivetée, soudée ou serrée) ou choix de certains types d'éléments pour modéliser le même phénomène (solides, plans, 1D...), et une estimation du niveau d'incertitude non-paramétrique qui leur serait équivalent.
 - Une méthode de sélection *a priori* du rang de la méthode GCA mérite d'être investiguée. Pour un niveau de dispersion donné, elle peut être basée sur un nombre limité de modifications correspondant à cette dispersion. Le critère de troncature *a posteriori* présenté dans ce travail est appliqué à cet échantillon de modifications. On peut estimer par ce moyen les rangs nécessaires de développement en série binomiale pour une utilisation efficace de la méthode GCA.
 - La poursuite de ce travail dans le contexte d'une approche info-gap peut être adaptée à la problématique posée. La méthode a été développée dans un contexte de fort manque d'informations. L'idée principale de la méthode est de considérer que l'incertitude sur une information est une lacune entre ce qui est connu et ce qui devrait l'être pour rendre possible une prise de décision fiable. La méthode a des applications dans le domaine de la fiabilité ou dans le domaine de la validation de modèles. Dans ce deuxième cas, elle peut aider à juger de la robustesse de deux modèles « optimaux », au sens qu'ils minimisent les écarts avec des données expérimentales, vis-à-vis de la dispersion sur les paramètres. On peut montrer qu'un modèle « sous-optimal » est plus fiable pour le concepteur, car plus robuste qu'un modèle « optimal », mais dont les dispersions seraient trop importantes ce qui réduirait les performances du produit.

Références bibliographiques

- [1] : H. ANDRIAMBOLOLONA, « Optimisation des essais et recalage de modèles structuraux », Thèse de Doctorat N° 149, Université de Franche Comté, LMARC 1990.
- [2] : M. ARNST, “Inversion of probabilistic models of structures using transfer functions.”, Thèse de Doctorat. Ecole Centrale Paris. 2007.
- [3] : G.B. BAECHEER and T.S. INGRA, “Stochastic FEM in settlement predictions.”, Journal of the Geotechnical Engineering Division, Vol 107(4), 449-463. 1981.
- [4] : R.J. BALLING, J.C. FREE and A.R. PARKINSON, “Consideration of worst-case manufacturing tolerances in design optimization.”, Proceedings of the International ASME. 1986.
- [5] : E. BALMES, “Review and evaluation of shape expansion methods.”, Proceedings of the 18th International Modal Analysis Conference, Texas. 2000.
- [6] : E. BALMES, “Parametric families of reduced finite element models. Theory and application.”, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol 10(4), 381-394. 1996.
- [7] : E. BALMES, “Modèles expérimentaux complets et modèles analytiques réduits en dynamique des structures.”, Mémoire de HDR, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI. 1997.
- [8] : E. BALMES, J.P. BIANCHI and J.M. LECLERE, “Structural Dynamics Toolbox for use with MATLAB.”, SDTools, User’s Guide Version 6.0. 2007.
- [9] : E. BALMES, “Optimal Ritz vectors for component mode synthesis using the singular value decomposition.”, AIAA Journal, Vol 34, 1256-1260. 1996.
- [10] : T. BAYES, “An essay towards solving a problem in the doctrine of chances.”, Philosophical Transactions of the Royal Society, LIII : 376-418, 1763.
- [11] : R. BELMANS and W. GEYSEN, “A case study of the electromechanical analysis of the audible noise in an inverter fed induction motor”, Proceedings of EPE, Aachen, 451-455. 1989.
- [12] : W.A. BENFIELD and R.F. HURDA, “Vibration analysis of structures by component mode substitution.” AIAA Journal, Vol 9, 1255-1261. 1971.
- [13] : Y. BEN-HAIM, “Information-gap Decision Theory: Decisions Under Severe Uncertainty. Academic Press, San Diego. 2001.
- [14] : J.A. BENNET, R.V. LUST, “Conservative methods for structural optimization.”, AIAA Journal. 1990.
- [15] : R. BERRIET, « Etude de méthodes de correction paramétrique de modèles en élastodynamique », Thèse de Doctorat N°484, Université de Franche Comté, LMARC, 1996.
- [16] : J.M. BERTHELOT, « Matériaux composites : comportement mécanique et analyse des structures », Masson, 1992.
- [17] : C. BERTHOD, “Identification paramétrique de grandes structures : réanalyse et méthode évolutionnaire.” Thèse de Doctorat, Université de Franche-Comté. 1998.
- [18] : M. BORNET, T. BRETEAU, P. GILORMINI, « Homogénéisation en mécanique des matériaux ». Hermes, 2001.
- [19] : M.L. BOUAZIZI, M. GUEDRI and N. BOUHADDI, “Robust component modal synthesis method adapted to the survey of the dynamic behaviour of structure with localised non-linearities.”, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol 20, 131-157. 2006.

- [20] : A. BOUAZZOUNI, « Contribution à l'identification de structures linéaires dissipatives dans le domaine fréquentiel », Thèse de Doctorat N°499, Université de Franche Comté, LMARC, 1995.
- [21] : K. BRAHMI, "Double condensation en sous-structuration dynamique.", Thèse de Doctorat, Université de Franche-Comté. 1996.
- [22] : K. BRAHMI, « Double condensation en sous-structuration dynamique », Thèse de Doctorat N°511, Université de Franche Comté, LMARC, 1996.
- [23] : E. CAPIEZ-LERNOUT, M. PELLISSETTI, H. PRADLWARTER, G.I. SCHUELLER, C. SOIZE, "Data and model uncertainties in complex aerospace engineering systems.", Journal of Sound and Vibration, Vol 295, 923-938. 2006.
- [24] : S.H. CHEN, X.W. YANG, H.D. LIAN, "Comparison of several reanalysis methods for modified structures.", Structural and Multidisciplinary Optimisation, Vol 20, 253-259. 2000.
- [25] : T.-W. CHOU, "Microstructural design of fiber composites". Cambridge University Press, 1992.
- [26] : CEI/IEC 61373. Railway Applications – Rolling Stock Equipment – Shock and Vibration Tests. First edition 1999-01.
- [27] : C.CETINYAKA, "Localization of longitudinal waves in bi-periodic elastic structures with disorder.", Journal of Sound and Vibration, Vol 221(1), 49-66. 1999.
- [28] : H. CHEBLI, "Modélisation des incertitudes aléatoires non-homogènes en dynamique des structures pour le domaine des basses fréquences.", Thèse de Doctorat. Conservatoire National des Arts et Métiers – Office National d'Etudes et de Recherche Aérospatiales. 2002.
- [29] : C. CHEN, D. DUHAMEL and C. SOIZE., "Probabilistic approach for model and data uncertainties and its experimental identification in structural dynamics: case of composite sandwich panels.", Journal of Sound and Vibration, Vol 294(1-2), 64-81. 2006.
- [30] : R.R. CRAIG and M.C.C. BAMPTON, "Coupling of substructures of dynamic analyses.", AIAA Journal, Vol 6(7), 1313-1319. 1968.
- [31] : R.R. CRAIG, "Coupling of substructures for dynamic analyses : an overview.", Proceedings of the 42nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structure, Structural Dynamics and Materials Conference and Exhibit, Vol 5, 3-14, Atlanta. 2000.
- [32] : S. COGAN, G. LALLEMANT, F. AYER, Y. BEN-HAIM, « Updating linear elastic models with modal selective sensitivity », Inverse Problems in Engineering, Vol 2, 1995, 29-47.
- [33] : A.M. DEAN & S.M. LEWIS, "Screening", Springer Verlag. 2004.
- [34] : J.P DEN HARTOG, "Vibration of frames of electrical machines", Transactions of American Society of Mechanical Engineers. Vol 50 1-6 and 9-11. 1928.
- [35] : O. DESSOMBZ, F. THOUVEREZ, J. LAINE and L. JEZEQUIEL, « Analysis of mechanical systems using interval computations applied to finite element methods.", Journal of Sound and Vibration, Vol 239(5), 949-968. 2001.
- [36] : M. JR. DIAS, "The effect of the clamping force on the dynamic behavior of a stator core.", Proceedings of the 17th international modal analysis conference, 201-207, USA. 1999.
- [37] : O. DITLEVSEN and H.O. MADSEN, "Structural Reliability Methods.", John Wiley & Sons. 1996.
- [38] : "DOT Users Manual", Version 2.04, VMA Engineering, 1990.
- [39] : D. DUBOIS and H. PRADE, "Possibilistic logic: a retrospective and prospective view.", Fuzzy set and Systems, Vol 144(1), 3-23. 2004.
- [40] : A.J. ELLISON and S.J. YANG, "Natural frequencies of stators of small electric machines", Proceedings of IEE, Vol 118, 185 – 190. 1971.

- [41] : A. EL OMRI, A. FENNAN, A. HIHI, «Elastic-Plastic homogenization for layered composites », European Journal of Mechanics. A. Solids, Vol 19, N° 4, 585-601.
- [42] : S.E ENNAIME, « Contribution à l'identification de structures mécaniques : localisation des défauts dominants et réanalyse, estimation des forces extérieures ». Thèse de Doctorat N° 516, Université de Franche Comté, LMARC 1996.
- [43] : E. ERDELYI, "Predetermination of the sound pressure levels of magnetic noise in medium induction motors", Ph.D thesis, University of Michigan. 1955.
- [44] : N. FILLOD and R. FILLOD, "A method for selecting master DOF in dynamic substructuring using the Guyan method.", Computer and Structure, Vol 46(516), 941-946. 1992.
- [45] : G.S. FISHMAN, "Monte Carlo : Concepts, Algorithms and Applications.", Springer Verlag. 1996.
- [46] : M.I. FRISWELL, « The adjusment of structural parameters using a minimum variance estimator », Mechanical Systems and Signal Processing, 1989, 143-155.
- [47] : S.D. GARVEY, "The vibrational behaviour of laminated components in electrical machines.", The fourth International Conference on Electrical Machines and Drives, 226-231. 1989.
- [48] : D. GAY, « Matériaux composites », Hermes, 1991.
- [49] : M. GERARDIN et D. RIXEN, "Théorie des Vibrations : Application à la Dynamique des Structures.", Masson, Paris. 2007.
- [50] : R.G. GHANEM and P.D. SPANOS, "Stochastic Finite Elements: a Spectral Approach.", Springer. 1991.
- [51] : G.M.L. GLADWELL, "Branch mode analysis of vibrating systems.", Journal of Sound and Vibration, Vol 1, 41-59. 1964.
- [52] : R.L. GOLDMAN, "Vibration analysis bu dynamic partitioning.", AIAA Journal, Vol 7, 1152-1154. 1969.
- [53] : K.F. GRAFF, "Wave Motion in Elastic Solids.", Dover Publications, 1975.
- [54] : R.J. GUYAN, "Reduction of stiffness and mass matrices.", AIAA Journal, Vol 3, 380. 1965.
- [55] : J.M. HAMMERSLEY and D.C. HANDSCOMB, "Monte Carlo Methods.", Fletcher & Son Ltd. 1967.
- [56] : F.M. HEMEZ, A.C. WILSON and S.W. DOEBLING, "Design of computer experiments for improving an impact test simulation.", Proceedings of the 19th International Modal Analysis Conference, 977-985, Florida. 2001.
- [57] : F.M HEMEZ, C. FRHAT, "Etude théorique et expérimentale entre modèles éléments finis et tests modaux pour de graneds et flexibles structures spatiales ». Actes du Colloque National de Mécanique, 1993, 480-493.
- [58] : W. HEYLEN, " Optimization of model matrices by means of experimentally obtained dynamic data", Katholieke University. Leuven, Belgium.
- [59] : S.N. HOU, "Review of modal synthesis techniques and a new approach." Shock and Vibration Bulletin, Vol 40(4), 25-30. 1969.
- [60] : S.J. HUANG, « Correction paramétrique de structures mécaniques : approches fréquentielles », Thèse de Doctorat N° 271, Université de Franche Comté, LMARC, 1992.
- [61] : L. HUMBERT, F. THOUVEREZ and L. JEZEQUIEL, "Finite Element dynamic model updating using modal thermoelastic fields.", Journal of Sound and Vibration, Vol 228(2), 397-420. 1999.
- [62]: B.M. HURTY, "Structural eigenvalue problems: elimination of unwanted variables.", AIAA Journal, Vol 3, 961-962. 1965.

- [63] : W.C. HURTY, "Vibrations of structural systems by component mode synthesis.", Journal of Engineering Mechanics Division, American Society of Civil Engineering, Vol 86(4), 51-69. 1960.
- [64] : S.R. IBRAHIM, "Correlation of analysis and test in modelling os structures: assessment and review ", Structural Safety Evaluation base on System Ident. Approaches, 1988.
- [65] : M. IMREGUN, W.J. VISSER, « A review of model updating techniques ». Schock and Vibration Digest, 1990.
- [66] : E. JAMHOUR, « Commande douce de systèmes mécaniques : optimisation de trajectoires sous diverses contraintes ». Thèse de Doctorat N° 412, Université de Franche Comté, LMARC, 1994.
- [67] : E.T. JAYNES, "Information theory and statistical mechanics.", Physical Review, Vol 106(4), 620-630 and Vol 108(2): 171-190. 1957.
- [68] : H. JORDAN and H. FROHNE, "Determination of resonance frequencies of stators of polyphase motors", Larmbekampfung, Vol 1, 137-140. 1957.
- [69] : D.C. KAMMER, « Sensor placement for on-orbit modal identification and correlation of large space structures". Journal Guidance, Vol 14, N° 2, 1991, 251-259.
- [70] : U. KIRSCH, "Design-oriented analysis of structures. Unified approach.", Journal of Engineering Mechanics, Vol 129(3), 264-272. 2003.
- [71] : U. KIRSCH, "A unified reanalysis approach for structural analysis, design and optimization.", Structural and Multidisciplinary Optimisation, Vol 25, 67-85. 2003.
- [72] : U. KIRSCH, "Combined approximations. A general reanalysis approach for structural optimization.", Structural and Multidisciplinary Optimisation, Vol 20, 97-106. 2000.
- [73] : G. KLIR, "Generalized information theory: aims, results and open problems.", Reliability Engineering and Systems Safety, Vol 85(1-3), 21-38. 2004.
- [74] : A.N. KOLMOGOROV, "Foundations of the Theory of Probability.", Chelsea 1956.
- [75] : P. LADVEZE, M. REYNIER, N. MAIA, "inverse Problems in Engineering, Chap. Error on the constitutive relation in dynamics.", Bui H.D.n Tanaka M. *et al.* editions. Rotterdam. 1994.
- [76] : W.M. LAI, D. RUBIN, E. KREMPL, "Introduction to Continuum Mechanics", Butterworth-Heinemann, 1993.
- [77] : G. LALLEMANT, J. PIRANDA, « Méthodes de recalage de modèles en élastodynamique linéaire », Cours Comett, 1991.
- [78] : K.H. LEE, I.S. EOM, G.J. PARK and W.I. LEE, "Robust design for unconstrained optimisation problems using Taguchi method. AIAA Journal. 1996.
- [79] : A.W. LEISSA, "Vibrations of Shells.", Nasa Report - SP-288, Ohio state University. 1973.
- [80] : P. LE MOAL, « Comportement viscoplastique de stratifiés verre-époxy : des propriétés du constituants à celles du matériau composite ». Thèse de Docotrat N° 337, Université de Franche Comté, LMARC, 1993.
- [81] : D. LENOIR, "Recalage de modèle en élastodynamique: synthèse bibiographique des methods basées sur l'exploitation des réponses forcées dans le domaine fréquentiel". Rapport LMARC, 1994.
- [82] : J.P. LOMBARD, "Contribution à la réduction des modèles elements finis par synthèse modale.", Thèse de Doctorat, Université de Franche-Comté. 1999.
- [83] : M. LOEVE, "Probability Theory.", Springer verlag, 1977. 4th edition.
- [84] : R. MACNEAL, "A hybrid method of component mode synthesis.", Computer and Structures, Vol 4, 581-601. 1971.
- [85] : D.R. MARTINEZ, A.K. MILLER, T.G. CARNE, "Combined experimental/ analytical modelling of shell/payload structures.", Proceedings of the ASME, AMD, Vol 67, 167-184. 1985.

- [86] : R. MAJED, « Placement optimal d'excitateurs et modélisation de structures non-linéaires », Thèse de Doctorat N° 493, Université de Franche Comté, LMARC 1995.
- [87] : M.D. MCKAY, R.J. BECKMAN and W.J. CONOVER, "A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code.", *Technometrics*, Vol 21(2), 239-246. 1979.
- [88] : F. MASSA, "Gestion des imperfections en phase de conception des structures mécaniques.", Thèse de Doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis. 2005.
- [89] : G. MASSON, B. AIT-BRICK, S. COGAN and N. BOUHADDI, "Component mode synthesis (CMS) based on an enriched Ritz approach for efficient structural optimization.", *Journal of Sound and Vibration*, Vol 296(4-5), 845-860. 2006.
- [90] : G. MASSON, "Synthèse modale robuste adaptée à l'optimisation de modèles de grande taille.", Thèse de Doctorat, Université de Franche-Comté. 2003.
- [91] : P. MICHEL, « Etude expérimentale et modélisation des caractéristiques mécaniques d'un matériau composite en verre-époxy ». Thèse de Doctorat N° 5, Université de Franche Comté, LMARC, 1983.
- [92] : P. MOINE, L. BILLET and D. AUBRY. "Two updating methods for dissipative models with non-symmetric matrices.", *Proceedings of the 15th International Modal Analysis Conference*, 1931-1936, Florida. 1997.
- [93] : R.M. MOORE, "Interval Analysis.", Prentice-Hall. 1966.
- [94] : J.E. MOTTERSHEAD and M.I. FRISWELL. "Model updating in structural dynamics:a survey." *Journal of Sound and Vibration*, Vol 167(2), 347-375, 1993.
- [95] : H.G. NATKE, "Updating computational models in the frequency domain based on measured data: a survey", *Probabilistics Engineering Mechanics*, 1988.
- [96] : NF EN 1993-1-9. Norme Européenne: Eurocode 3. Calcul des structures en acier –Partie 1-9: Fatigue – (Eng : Eurocode 3 – Design of steel structures – Part 1-9 : Fatigue).
- [97] : NF EN 1999-1-1. Norme Européenne: Eurocode 9. Calcul des structures en aluminium– Part 1-1: Règles générales– (Eng : Eurocode 9 – Design of aluminium structures – Part 1-1 : General rules).
- [98] : A.S. NOBARI, M. IMREGUN, S. ZIAEI RAD, "On the uniqueness of updated models", *ISMA* 19, Leuven, 1994.
- [99] : W.L. OBERKAMPF, S.M. DELAND, B.M. RUTHERFORD, K.V. DIEGERT and K.E. ALVIN, "Error and uncertainty in modelling and simulation.", *Reliability Engineering and System Safety*, Vol 75(3), 333-357. 2002.
- [100] : M. PAPADRAKAKIS and V. PAPADOPOULOS, "Parallel solution methods for stochastic finite element analysis using Monte Carlo simulation.", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol 168, 305-320. 1999.
- [101] : R. PASCUAL GIMENEZ, J.C. GOLINVAL and M. RAZETO, "On the reliability of error localization indicators.", *Proceedings of the 23rd International Conference on Noise and Vibration Engineering*, Leuven. 1998.
- [102] : H. PAVLOVSKY, "Vypocet vlastnich kmitoctu statorovych, svazku elektrickych stroju, elektrickych stroju", *Elektrotech. Obz.* Vol 57, 305-311. 1968.
- [103] : J. PIRANDA, « Analyse modale et recalage de modèle », *Projet de Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches*, Université de Franche Comté, LMARC, 1994.
- [104] : J.S. PRZEMMENIECKI, "Theory of Matrix Structural Analysis.", Dover publications Inc. 1968.

- [105] : G. PUEL, “Sur une théorie des méconnaissances en dynamique des structures.”, Thèse de Doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan. 2004.
- [106] : D.A. RADE, « Correction paramétrique de modèles éléments finis : élargissement de l’espace de connaissance ». Thèse de Doctorat N° 403, Université de Franche Comté, LMARC, 1994.
- [107] : A.N RAMANITRANJA, « Identification paramétrique : adaptation entre la structure et son modèle par expansion », Thèse de Doctorat N° 532, Université de Franche Comté, LMARC 1996.
- [108] : D. RIXEN, “The dual Craig-Bampton method.”, Proceedings of the 21st IMAC, FLORIDA. 2003.
- [109] : C.P. ROBERT and G. CASELLA, “Monte Carlo Statistical Methods.”, Springer, New York. 2004.
- [110] : R. ROY and JR. CRAIG, “Mechanics of Materials”, ISBN 0-471-50284-7, John Wiley & Sons, 1996.
- [111] : S. RUBIN, “Improved component mode representation for structural dynamic analysis.”, AIAA Journal, Vol 13(8), 995-1006. 1975.
- [112] : R.Y. RUBINSTEIN, “Simulation and the Monte Carlo Method.”, John Wiley & Sons. 1981.
- [113] : A. SALTELLI, S. TARANTOLA, F. CAMPOLONGO and M. RATTO, “Sensitivity Analysis in Practice: A Guide to Assessing Scientific Models.”, John Wiley & Sons. 2004.
- [114]: P. SALVINI, A. FREGOLENT, “ On the chances for a successful updating”, ISMA 19, Leuven, 1994.
- [115] : G.I. SCHUELLER, “Computational stochastic mechanics: recent advances.”, Computers and Structures, Vol 79, 2225-2234. 2001.
- [116] : P. SCHIAVONE and N. BOUHADDI, “Reduced models allowing frequency responses calculation.”, Mécanique Industrielle et Matériaux, Revue du GAMI, Vol 49(2), 79-81. 1996.
- [117] : P. SCHIAVONE, “Contribution au recalage de modèles base sur la corrélation des réponses fréquentielles.”, Thèse de Doctorat, Université de Franche-Comté. 1999.
- [118] : J.F. SCHULTZE, F.M HEMEZ, S.W DOEBLING and H. SOHN, “Statistical based non-linear model updating using feature extraction.”, Proceedings of the 19th International Modal Analysis Conference, 18-26, Florida. 2001.
- [119] : G.I. SCHUELLER, L.A. BERGMAN, C.G. BUCHER, G. DASGUPTA, G. DEODATIS, R.G. GHANEM, M. GRIGORIU, M. HOSHIYA, E.A. JOHNSON, A. NAEISS, H.J. PRADLWARTER, M. SHINOZUKA, K. SOBCZYK, P.D. SPANOS, B.F. SPENCER, A. SUTOH, T. TAKADA, W.V. WEDIG, S.F. WOJTKIEWICZ, I. YOSHIDA, B.A. ZELDIN and E. ZHANG, “A state-of-the-art report on computational stochastic mechanisms.”, Probabilistic Engineering Mechanics, Vol 12(4), 197-321. 1997.
- [120] : J.L. SEWALL and E.C. NAUMANN, “Technical Note NASA-TN D-4705. An experimental and analytical vibration study of thin cylindrical shells with and without longitudinal stiffeners.”, National Aeronautics and Space Administration, Washington D.C. 1968.
- [121]: G. SHAFER, “A Mathematical Theory of Evidence.”, Princeton University Press. 1976.
- [122] : C.E. SHANNON, “A mathematical theory of communication.”, Bell System Technology Journal, Vol 27, 379-426 and 623-656. 1948.
- [123] : M. SHINOZUKA and F. YAMAZAKI, “Stochastic Structural Dynamics: Progress in Theory and Applications, Chap: Stochastic Finite Element Analysis.”, Elsevier Applied Sciences. 1988.
- [124] : J.A. SHUMILOV, “Calculating stator vibrations in electrical machines”, Proceedings of the International Conference on Electrical Machines, London. 1974.

- [125] : R.K. SINGAL, S.P. VERMA and K. WILLIAMS, "Vibrations of long and short laminated stators of electrical machines, Part III: results for short stators and validity of simplified frequency equation", *Journal of Sound And Vibration*, Vol 115(1), 31-44. 1989.
- [126] : C. SOIZE, "Modélisation du flou structural en dynamique linéaire des systèmes mécaniques complexes. I. Eléments théoriques.", *La Recherche Aérospatiale*, Vol 5, 337-362. 1986.
- [127] : C. SOIZE, "Vibration damping in low-frequency range due to structural complexity : a model based on the theory of fuzzy structures and model parameters estimations.", *Computers and Structures*, Vol 58(5), 901-915. 1994.
- [128] : C. SOIZE, "A non-parametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics.", *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol 15(3), 277-294. 2000.
- [129] : C. SOIZE, "A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics.", *Journal of Sound and Vibration*, Vol 288(3), 623-652. 2005.
- [130] : T. TAKADA, "Variability response functions and stochastic field discretization in stochastic finite element methods.", *Proceedings of the 6th Speciality Conference on Probabilistic Mechanics and Structural and Geotechnical Reliability*, Connecticut. 1992.
- [131] : Z. TANG, P. PILLAY, A. OMEKANDA and C.Li., "Measurement of Young's modulus for switched reluctance motor vibration determination.", *IEEE, Proceedings of the International Conference on Electric Machines and Drives*. Vol. 3 1590-1595. 2003.
- [132] : S.K. THOMPSON, "Sampling.", *Wiley Interscience*. 1992.
- [133] : P.L. TIMAR, "Noise and Vibration of Electrical Machines". London: Springer-Verlag. 1988.
- [134] : E.H. VANMARCKE and M. GRIGORIU, "Stochastic finite element analysis of simple beams.", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol 109-5), 1203-1214. 1983.
- [135] : D. VENEZIANO, F. CASCIATI and L. FARAVELLI, "Method of seismic fragility for complicated systems.", *Proceedings of the 2nd Specilistic Meeting on Probabilistic Methods in Seismic Risk Assessment for NPP*, California. 1983.
- [136] : D. VERDYCK, R. BELMANS and W. GEYSEN, "Electro-mechanical analysis of the audible noise of an inverter-fed squirrel-cage induction motor", *IEEE Transaction on Industrial Electronics*, Vol 27, 539-544. 1991.
- [137] : S. P. VERMA and R.S. GIRGIS, "Considerations on the choice of main dimensions of stators of electrical machines in relation to their vibration characteristics", *IEEE Transactions on PAS*, Vol 94, 2151-2159. 1975.
- [138] : S.P. VERMA, "Vibration behaviour of laminated stators of electrical machines", *The third Conference on Electrical Machines and Drives*, 113-117. 1987.
- [139] : S.P. VERMA, K. WILLIAMS and R.K. SINGAL, "Vibrations of long and short laminated stators of electrical machines, Part I: theory, experimental models, procedure and set-up", *Journal of Sound And Vibration*, Vol 129 (1), 1-13. 1989.
- [140] : E. WALTER, L. PRONZATO, " Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales". Masson, 1994.
- [141] :C. WANG and J.C. LAI, "Vibration analysis of an induction motor.", *Journal of Sound and Vibration*, Vol 224(4), 733-756. 1999.
- [142] : H. WANG and K. WILLIAMS, "Effets of laminations on the vibrational behaviour of electrical machine stators.", *Journal of Sound and Vibration*, Vol 202(5), 703-715. 1997.
- [143] : B.P. WANG, W.D. PIKLEY, A.R. PALAZZOLO, "Reanalysis modal synthesis and dynamic design, Chap. 8, In state of the art surveys on Finite Element technology.", *ASME publications*. 1983.

- [144] : S. WATANABE, S. KENJO, K.IDE, F.SATO and M. YAMAMOTO, "Natural frequencies and vibration behaviour of motor stators.", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-102, No 4. 1983.
- [145] : J. WEISS, C. BORD., "Les matériaux composites", L'Usine, Paris, 1992.
- [146] : T. WEISSER et N. BOUHADDI, "Rénalyse dynamique de structures par une variante de la méthode des Approximations Combinées.", Actes du 9^{ème} Colloque National en Calcul des Structures, Vol 1, 695-700. Giens. 2009.
- [147] : K. WILLIAMS, R.K. SINGAL and S.P. VERMA, "Vibrations of long and short laminated stators of electrical machines, Part II: results for long stators", Journal of Sound And Vibration, Vol 129 (1), 15-29. 1989.
- [148] : K. WORDEN, G. MANSON, T.M. LORD and M.I. FRISWELL, "Some thoughts on uncertainty quantification and propagation.", Proceedings of the 21st International Modal Analysis Conference, Florida. 2003.
- [149] : S.J. YANG, "Finite Element method in evaluating the stator natural frequencies of small machines.", Proceedings of the International Conference on Electrical Machines. 1978.
- [150] : K.C. YAP and D.C. ZIMMERMAN, "A comparative study of structural dynamic modification and sensitivity method approximation.", Mechanical Systems and Signal Processing, Vol 16(4), 585-597. 2002.
- [151] : L.A. ZADEH, "Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility.", Information and Control, Vol 1, 3-28. 1978.
- [152] : L.A. ZADEH, "Fuzzy sets.", Information and Control, Vol 8, 338-353. 1965.
- [153] : Q. ZHANG, "Identification modale et paramétrique de structures mécaniques auto-adjointes et non auto-adjointes", Thèse de Doctorat N° 211, Université de Franche Comté, LMARC, 1987.
- [154] : Z.Q. ZHU and D. HOWE, "Effects of end-shields and rotor on natural frequencies and modes of stator of small electrical machines", The fourth International Conference on Electrical Machines and Drives, 232-236. 1989.

SIMULATIONS ET ESSAIS DYNAMIQUES SUR STATORS DE MOTEURS DE TRACTION

Résumé

La maîtrise du calcul prévisionnel du comportement dynamique des stators de machines de traction est un enjeu majeur pour le constructeur tant sur le plan de la compréhension de certains phénomènes physiques, que sur le plan de l'amélioration de la conception en présence de facteurs mal maîtrisés. La démarche proposée dans ce travail a d'abord consisté à construire et valider le modèle d'un stator type en effectuant des corrélations calculs-essais et un recalage de modèle. Ceci a permis de caractériser le comportement moyen de cet assemblage hétérogène et surtout d'établir des règles de modélisation transposables à d'autres types d'architectures. L'étude s'est poursuivie ensuite avec l'investigation des incertitudes affectant cette modélisation ainsi que leur propagation. Afin de prendre en compte tous types d'incertitudes, aléatoires ou épistémiques, sur une

même procédure, une méthode hybride « paramétrique – non-paramétrique » de modélisation et de propagation des incertitudes a été proposée. En raison de la taille importante des modèles industriels des stators, le problème est traité dans un contexte de sous-structuration et revient à réaliser une réanalyse approchée. Afin d'assurer un compromis entre un coût de calcul raisonnable et une bonne prédiction des bases de réduction, la méthode des Approximations Combinées a été adaptée à la sous-structuration afin d'être intégrée au processus de réanalyse. Outre ses avantages en termes de gain en temps de calcul par rapport à une réanalyse exacte, nous avons également montré sa robustesse par rapport à une méthode de réduction standard ou à une méthode améliorée de type enrichissement par résidus statiques.

Mots clés

Dynamique, stators ferroviaire, règles de modélisation, robustesse, incertitudes, non-paramétrique, approximations combinées

DYNAMIC SIMULATIONS AND TESTS ON STATORS OF RAILWAY MOTORS

Abstract

Mastering numerical simulations of the behaviour of railway stators remains an important challenge for designers. This allows both the understanding of some physical phenomena and the improvement of design in presence of different sources of uncertainties. The approach proposed in this work consists firstly on building and validating a numerical model of a typical design stator. By carrying out numerical-experimental confrontations and updating models, this first step allowed us to characterize the mean behavior of this heterogeneous assembling and mainly to establish generic modeling rules for other design stators. The second part of this work deals with the investigation of uncertainties affecting the structure or its model. In order to take into account all uncertainties types while performing a calculation of uncertainties

propagation, a stochastic hybrid method, combining parametric and non-parametric models, was proposed. Because of the large sizes of finite element models of stators, the problem is treated in a component mode synthesis context. It amounts to carry out an approach reanalysis. In order to ensure a good compromise between reasonable calculation times and an acceptable precision, a generalized variant of the Combined Approximations method (VCA) has been introduced and adapted to component mode synthesis. The VCA method allows both a significant gain in computation time, comparing to an exact calculation, and a high robustness performance comparing to a standard reduction method or an improved method by static residual vectors.

Keywords

Dynamics, railway stators, modeling rules, robustness, uncertainties, non-parametric, combined approximations